Wien 1. May 1893

Hochverehrter Herr Decan!

Heute erhielt ich die Einladung zu der für morgen anberaumten ~~neuen~~ zweiten Commissionssitzung betreffend die Besetzung der mit Hofr. Stefan verwaisten Lehrkanzel der Physik. Ich bitte Sie ergebenst mich von dem Amte eines Mitgliedes dieser Commission ~~[illegible]~~ gütigst entheben zu wollen, und erlaube mir im Folgenden die Gründe die mich zu dieser Bitte bewogen auseinanderzusetzen, wobei ich zugleich das Ansuchen stelle ~~Sie~~ den Inhalt dieses Briefes der hochverehrten Commission bekannt geben, und den Brief selbst dem Protokoll beischließen zu wollen.

~~Anfang~~ Mitte Jänner d. J. erhielt ich einen Brief von Prof. Boltzmann in welchem er mich um Bekanntgabe der näheren

Umstände welche den Tod Stefans ~~bef~~ begleiteten ersuchte. Ich theilte ihm das Wenige was ich wusste mit und schloss den Brief mit der ~~privaten Anfrage~~ Frage ob er wohl geneigt wäre die Lehr-Kanzel Stefan's event. zu übernehmen. Zugleich bemerkte ich dass ich über diese Angelegenheit (Stefan war ja kaum eine Woche lang begraben) mit Niemandem gesprochen habe, und dass daher ~~die Anfrage nur dem Interesse entspringe~~ meine Anfrage rein privater Natur, und zunächst nur zu meiner eigenen Orientirung bestimmt sei.

Prof. Boltzmann antwortete mir sofort dass es immer sein Ideal gewesen sei an einem so berühmten Institute wie es der Stefan'sche war als Lehrer wirken zu können, und dankte für seine Bereitwilligkeit

gegen jenes welches die erste Commission hätte zu Tage fördern können in gar keinem Verhältnisse stehen.

Nachdem ich nun nicht gewürdigt worden bin in der meiner Ansicht nach hochwichtigen ersten Commission einen Platz zu finden, so verzichte ich darauf Mitglied dieser zweiten Commission zu sein.

Empfangen Sie hochverehrter Herr Decan die Versicherung meiner vorzüglichsten Hochachtung mit welcher ich verbleibe

Ihr ganz ergebener

Em. Weyr

Koncept dopisu mého ~~otc~~ otce Dra Emila Weyra, profesora mathematiky na univ. ve Vídni († ~~14~~ 25/I 1894), děkanu filosof. fakulty.

Brno, 18/II 1928 F. Weyr

mit dem Ersuchen in der Sitzung hievon
denjenigen Gebrauch zu machen welcher
Ihnen als der guten Sache dienlich er-
scheinen möchte.
Die Beschlüsse der Commission sind mir
nicht bekannt nur höre ich, daß
Boltzmann plötzlich abgelehnt
hat, er muß aber wohl vorgeschlagen
worden sein. Was ihn zur plötzlichen Absage
bestimmt hat kann ich natürlich
nicht beurtheilen doch fürchte ich
daß es die Nebenfragen gewesen
sein möchten welche man, meiner
Ansicht nach ganz überflüssiger Weise
mit einer so hochwichtigen Aktion
wie es die Schritte zur ~~Ber~~ Gewinnung
Boltzmanns waren, zu verknüpfen
für gut befunden hat.
Die Resultate nun welche die
neuen Com. berathen haben können
werden unter allen Umständen

einen Rufe ~~zu~~ nach Wien zu folgen klar und deutlich aus.

Bald darauf erfuhr ich, daß die von Ihnen zusammengesetzte Commission welche über die Wiederbesetzung der Stefan'schen Lehrkanzel berathen sollte eine Sitzung abhalten werde. Zu meinem größten Erstaunen ~~erfuhr~~ sah ~~ich~~ ich daß ich ~~nicht~~ dieser Commission nicht beigezogen ~~bin~~ wurde; ich weiß wohl daß dem Decan einzig und allein das Recht zusteht die Commissionsmitglieder zu ernennen, daß man aber gerade den älteren Ordinarius der Mathematik welcher überdies die Zunge ~~für~~ Boltzmanns (~~dessen Erwerbung für unsere Universität ein nicht ganz~~ hoch genug anzuschlagender glänzender Gewinn ~~gewesen wäre~~ für die Wiener Universität wäre) in der Hand hatte, ausschließen würde, das konnte

und?
ich nicht erwarten, und ich bekenne offen daß mich diese Reisebeschreibung schmeichelhaft berührt hat. Wenn ich auch damals unwohl war, so war das Unwohlsein doch nicht so bedeutend daß ich ~~[illegible]~~ in der Commissionssitzung nicht hätte erscheinen können. Daß ich ~~[illegible]~~ bei der Berathung alles daran gesetzt hätte ~~eine~~ der Berufung einer so hochbedeutenden Kraft wie es Boltzmann ist das Wort zu reden, versteht sich wohl von selbst. Fiele doch von dem Glanze den Boltzmann's Name in der ganzen wissenschaftlichen Welt umfließt, ein guter Theil auf unsere Hochschule! Da ich nun aber einmal nicht Mitglied der Commission war, so übergab ich die beiden Briefe Boltzmanns dem Collegen v. Escherich, ~~und bin ich überzeugt~~

UNIV. PROF. DR. FRANT. WEYR

V Brně, dne 18/II 28

Velectěný pane notáři!

Splňuji tímto svůj ~~[illegible]~~ slib a zasílám Vám pár rukopisných pamětek po mém otci. Jak z jeho obsahu seznáte, jde v něm o povolání slavného fysika Boltzmanna na Vídeňskou universitu, které se arciť neuskutečnilo. Můj otec byl té doby už těžce nemocen, ale nejsa si asi vědom * vážnosti svého stavu (zemřel nedlouho po tom), kterýž ~~[illegible]~~ snad poněkud tehdejšímu děkanu filosof.

fakulty, který při ustavování komise s ním patrně ani nepočítal. —

Jsem přesvědčen, že se postaráte vždy o pietní úschovu této památky.

Znamenám se v dokonalé úctě Váš oddaný

[illegible]

Beiträge zur Curvenlehre

von

Dr. Emil Weyr

ord. öff. Professor der Mathematik an der k.k. Universität und corresp. Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, auswärtiges Mitglied der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften und Ehrenmitglied der mathematischen Gesellschaft in Prag, corresp. Mitglied des Istituto Lombardo di scienze e lettere in Mailand, Ehrenmitglied der société des sciences mathématiques et physiques in Bordeaux, Mitglied des conseils der société mathématique de France in Paris, wirkliches Mitglied der Carlo-Leopoldinischen Akademie und der mathem. Gesellschaften in Wien und Moskau.

Inhalt.

I. Mehrdeutige Gebilde. Art 1 – 15
II. Symmetrische Elementensysteme. Art 16 – 36
III Die Sätze von Poncelet über ein- und umschriebene Polygone. Art 37 – 39
IV. Die Projectivität der singulären Elemente zweideutiger Gebilde. Art 40 – 41
V. Involutionen n-ter Ordnung K-ter Stufe. Art 42 – 48
VI. Erzeugnisse mehrdeutiger Grundgebilde erster Stufe. Art 49 – 56
VII. Einzweideutige Gebilde. Art 58 – 60

~~[illegible]~~

von ~~[illegible]~~

8

I. Mehrdeutige Gebilde

~~W. Allgemeine Begriffe~~

1. Wenn sich die einzelnen Elemente eines Elementensystemes von einfacher Unendlichkeit durch die einzelnen Werthe eines Parameters eindeutig bestimmen lassen, so nennen wir das Elementensystem ein <u>razionales</u>. Nur von solchen soll im Folgenden gehandelt werden.

Derartige Systeme sind z. B. die Punktsysteme auf razionalen Curven, die Tangentensysteme solcher Curven oder die Systeme der Schmiegungsebenen entwickelbarer razionaler Flächen (razionaler Raumcurven). Ebenso die Curven- und Flächenbüschel, in denen entweder Curven oder Flächen als Elemente zu betrachten sind

2. Besteht zwischen zwei Elementen-systemen eine derartige Beziehung daß jedem Elemente des einen m Elemente des anderen, und jedem Elemente des zweiten n Elemente des ersten entsprechen so sind die Systeme in $m-n$-deutiger Beziehung [~~...~~] Das erste System ist n-deutig und das zweite ~~sind~~ ist m-deutig. Zwischen den Parametern x, y zweier solcher Systeme besteht eine Gleichung $F(x, y) = 0$ welche in x vom n-ten und in y vom m-ten Grade ist. Diese Gleichung nennen wir die Verwandtschaftsgleichung.F

3. Da in der Verwandtschaftsgleichung im Allgemeinen $[mn + (m+n)]$ von einander unabhängige Constanten vorkommen so schließen wir daß die beiden Systeme durch $[mn + (m+n)]$ Paare entsprechender Elemente bestimmt sein werden ⊙

4. Eine lineare Transformation lässt den Grad einer Gleichung ungeändert; hieraus schließen wir daß durch homografische Transformationen zwei $m-n$-deutige ~~Gebilde~~ Systeme in ebensolche ~~Gebilde~~ Systeme übergehen

5. Wenn die Elemente des einen Systemes zugleich Elemente des anderen sind (Systeme auf demselben Träger, conlocale Systeme, ~~Systeme auf demselben Träger~~) so kann man den Parametern x, y dieselbe Bedeutung unterlegen, und in der Gleichung $F(x, y) = 0$ $y = x$ setzen; hieraus ergibt sich eine Gleichung vom $(m+n)$-ten Grade welche solche Elemente liefert die mit einem ihrer entsprechenden zusammenfallen. Zwei $m-n$-deutige conlocale Systeme haben daher $(m+n)$ gemeinsamer Elemente.⊕ (~~...~~

~~...~~

5

F Für $m = n = 1$ ergibt sich die Verwandtschaftsgleichung der Projectivität $Axy + Bx + Cy + D = 0$. ~~...~~ Hieraus folgt

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}$$

so daß sich also jeder der beiden Werte x, y in linearer Weise durch den anderen ausdrückt. (Lineare Transformation)

---

ad ⊙ auf nächster Seite:
Aus der gefundenen Zahl ergibt sich daß ~~...~~ zwischen $mn + m + n + 1$ oder also zwischen $(m+1)(n+1)$ Elementenpaaren zweier $m-n$-deutiger Gebilde eine von der besonderen Art und Lage der Gebilde unabhängige

~~Vergleiche die Doppelverhältniss... zwischen der Theorie Chasles~~

Relation bestehen muß. Bei den eindeutigen (projectivischen) Gebilden ist es die Relation der Doppelverhältnißgleichheit.

⊕ Die gemeinsamen (Doppel-) Elemente zweier projectivischen conlocalen Systeme sind gegeben durch die Gleichung:

~~$Ax^2 + \ldots$~~

$$Ax^2 + (B+C)x + D = 0$$

Sind sie reell und erteilt man ihnen die Parameterwerte $0, \infty$ so muß $A = 0$, $D = 0$ sein so daß die Verwandtschaftsgleichung die Form annimmt

$$Bx + Cy = 0$$

oder

$$\frac{y}{x} = K$$

---

5. Wenn von den gemeinsamen Elementen r zusammenfallen so entsteht ein r-faches gemeinsames Element oder ein r faches Doppelelement beider Gebilde.

6. Wenn einem Elemente des einen Systemes zwei zusammenfallende Elemente des anderen entsprechen so nennen wir jenes ein Verzweigungselement und die beiden letzteren bilden ein Doppelelement des ~~ersten~~ zweiten Systemes. Soll $F(x,y)=0$ zwei ~~gleiche~~ gleiche Wurzeln y haben so muss auch $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ sein; eliminiert man aus beiden Gleichungen y so ergibt sich für x eine Gleichung vom Grade $2n(m-1)$ woraus folgt: das n deutige System enthält $2n(m-1)$ Verzweigungselemente welchen ebensoviele Doppelelemente im m-deutigen Systeme entsprechen. Ebenso hat das letztere $2m(n-1)$ Verzweigungselemente und das erstere soviele

entsprechende Doppelelemente. Wenn von den einem Elemente entsprechenden Elementen $(p+1)$ zusammenfallen so heißt es ein Verzweigungselement von der p-ten Ordnung; die zusammenfallenden Elemente bilden ein $(p+1)$faches Element.

7. Für $m=1$ geht die Gleichung $F(x,y)=0$ über in: $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_0) - y(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \dots b_0) = 0$

und in diesem Falle bildet das n-deutige System eine Involution n-ten Grades. Jedem Elemente y entspricht eine Gruppe von n Elementen x welche man auch als einander (involutorisch) entsprechend betrachten kann. Da eine Gruppe ein für sich abgeschlossenes Ganze bildet so herrscht in ihrem Bereiche Vertauschungsfähigkeit; dies ist der Hauptcharakter der Involutionen. Eine Involution n-ten Grades besitzt $2(n-1)$ Doppelelemente (6), und ist bestimmt

sobald $(2n+1)$ ihrer Elemente ebensovielen Elementen eines eindeutigen Systemes zugeordnet sind (3).

Man kann eine Involution an und für sich auch durch zwei Gruppen ihrer Elemente bestimmen welche man dann als jene der letzten Gleichung betrachten kann welche den Werten $y=0$, $y=\infty$ entsprechen.

Die Elementenpaare einer quadratischen Involution theilen bekanntlich das Paar der Doppelelemente harmonisch ($n=2$). ↑

8. Sind die beiden m-n-deutigen Systeme conlocal so kann man nach der Zahl der <u>involutorischen Elementenpaare</u> fragen d.h. nach solchen Paaren von Elementen von denen jedes dem anderen entspricht ob man es nun zu diesem oder zu jenem Systeme rechnet. Vertauscht man in der Gleichung $F(x,y)=0$ die Parameter x und y, so erhält man

~~Doppelparameter der Curven~~

ad ↑ $n=2$.

Man kann je zwei Elemente einer Involution n-ten Grades welche einer und derselben Gruppe angehören als einander entsprechende Elemente betrachten und es ist klar dass jedem Elemente in dieser Art $(n-1)$ weitere Elemente entsprechen werden welche mit ihm eine Gruppe bilden. Zwischen den Parametern zweier entsprechender Elemente wird eine Relation stattfinden deren Form wir leicht finden können. Wenn wir die Gleichung $F(x\,y)=0$ für den Fall der Involution in der Form schreiben

$$f(x) - y\varphi(x) = 0$$

wobei $f(x)$ und $\varphi(x)$ Polynome n-ten Grades sind, so werden zwei Elemente $x\,x'$ einer Gruppe angehören wenn für dieselbe y gleichzeitig

$$f(x) - y\varphi(x) = 0$$
$$f(x') - y\varphi(x') = 0$$

ist. Durch Elimination von y ergibt sich die Beziehung zwischen den Parametern $x\,x'$ zweier einander entsprechenden Elemente der Involution zunächst in der Form:

$$f(x)\varphi(x') - f(x')\varphi(x) = 0$$

Die linke Seite dieser Gleichung muss offenbar den Factor $(x-x')$ enthalten nach deren Unterdrückung man eine Gleichung:

$$\Psi(x\,x') = 0$$

erhält welche in $x\,x'$ symmetrisch und vom Grade $(n-1)$ sein wird. Es ist die Verwandtschaftsgleichung der Involution. Es ist nicht schwierig die Form dieser Gleichung im Allgemeinen wie in besonderen Fällen zu ermitteln.

In dem Produkte $f(x)\varphi(x')$ kommen nämlich offenbar zwei Glieder von der Form $(a_{n-r} b_{n-p} x^{n-r} x'^{n-p} + a_{n-p} b_{n-r} x^{n-p} x'^{n-r})$ und in $f(x')\varphi(x)$ die analogen Glieder: $(a_{n-r} b_{n-p} x'^{n-r} x^{n-p} + a_{n-p} b_{n-r} x'^{n-p} x^{n-r})$ vor. Diese Glieder liefern für $[f(x)\varphi(x') - f(x')\varphi(x)]$ ein Glied:

$$\begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-p} \\ b_{n-r} & b_{n-p} \end{vmatrix} (x^{n-r} x'^{n-p} - x^{n-p} x'^{n-r}).$$

Es sei nun $r < p$ also etwa $r = p - s$ so kann man den letzten Ausdruck in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-p} \\ b_{n-r} & b_{n-p} \end{vmatrix} x^{n-p} x'^{n-p} (x^s - x'^s)$$

oder:

$$(x-x') \begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-p} \\ b_{n-r} & b_{n-p} \end{vmatrix} x^{n-p} x'^{n-p} (x^{s-1} + x^{s-2} x' + x^{s-3} x'^2 + \dots\ x'^{s-1}).$$

Wir sehen also zunächst daß für $r = p$ das Glied verschwindet da die Determinante gleich Null wird; Es fallen also aus der

Größe $f(x)\varphi(x') - f(x')\varphi(x)$ alle Glieder von der Form $A x^{\alpha} x'^{\alpha}$ weg. Jedes übrig bleibende Glied enthält den Faktor $\pm(x-x')$ je nachdem nämlich $r < p$ oder $r > p$ ist. Die nach Unterdrückung dieses Faktors zurückbleibende Gleichung $\Psi(x\,x') = 0$ enthält demnach Glieder von der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-p} \\ b_{n-r} & b_{n-p} \end{vmatrix} x^{n-p} x'^{n-p} (x^{p-r-1} + x^{p-r-2} x' + x^{p-r-3} x'^2 + \dots\ x'^{p-r-1})$$

wobei $r < p$ angenommen ist. Es ist also jedes Glied der Funktion $\Psi(x\,x')$ eine symmetrische Funktion und daher auch $\Psi(x\,x')$ selbst.

So erhält man z. B. für eine quadratische Involution:

$$(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) - y(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = 0$$

zwischen zwei Elementen $x\,x'$ einer Gruppe die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} x x' + \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} (x + x') + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0;$$

Als Beziehung zwischen $x\,x'$ bei der cubischen Involution (Involution 3. Grades) $(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) - y(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = 0$ erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} x^2 x'^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x x'(x + x') + \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} (x^2 + x x' + x'^2) + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} x x'$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} (x + x') + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

die Gleichung $F(y, x) = 0$ welche
mit ersterer $(m+n)^2$ gemeinschaftlicher
Wurzelpaare besitzt. Unter diesen
befinden sich jedoch ~~auch~~ die $(m+n)$
Wurzeln der Gleichung $F(x, x) = 0$, sowie auch die Werte $0, \infty$ von denen jedes $m \cdot n$ Wurzelpaare vorstellt,
so daß nur $\left((m+n)^2 \overset{-2mn}{-\,m-n}\right) = m(m-1) + n(n-1)$
verschiedener Wurzelpaare zurück-
bleiben.[F] Wir sehen also daß zwei
conlocale m-n-deutige ~~Gebilde~~
Systeme $\left[\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right]$ involu-
torischer Elementenpaare besitzen.

[F] Unter diesen Wurzelpaaren kommt jedes zweimal vor, nämlich in der Zusammenstellung $x\,y$ und $y\,x$.

9. Wenn zwei m-n-deutige Systeme
conlocal sind so kann man nach
der Zahl der Paare entsprechender
Elemente fragen welche ein gegebenes
Elementenpaar a, b des Systemes
harmonisch theilen. Sorgt man
(unbeschadet der Allgemeinheit)
dafür, daß den gegebenen Elementen
a, b die Parameterwerte $0, \infty$
entsprechen, so werden zwei Elemente
x, y dann harmonisch sein wenn $y = -x$
ist. Setzt man also in $F(x, y) = 0$

$y = -x$ so ergibt sich eine Gleichung
vom $(m+n)$-ten Grade aus welcher
$(m+n)$ Werte für x und ebensoviele
für $y = -x$ folgen. Es gibt somit
$(m+n)$ harmonischer Paare.
Da die Elementenpaare welche a, b
harmonisch trennen eine quadratische Involution bilden
so können wir auch sagen:
Zwei m-n-deutige conlocale
Systeme haben mit einer mit ihnen conlocalen
quadratischen Involution $(m+n)$
Elementenpaare gemeinschaftlich.

10. Von großer Fruchtbarkeit
ist die ~~[illegible]~~ Betrachtung der
Punkt und Tangentensysteme
an Kegelschnitten. Wir können
uns auf die Untersuchung der
Punktsysteme beschränken, weil
jene der Tangentensysteme nach
den Gesetzen der Reciprocität
aus ihr folgt. Und umgekehrt.
Hat man auf einem Kegelschnitte
C_2 zwei m-n-deutige Punktsysteme

DSI

und verbindet man jeden Punkt
x mit den entsprechenden Punkten
y so erhält man eine Schaar
von Geraden welche die
Direktionscurve D der beiden
Systeme einhüllen. Da man
jeden Punkt von C_2 sowohl
zu dem einen als auch zu dem
anderen Systeme rechnen kann
so gehen durch ihn $(m+n)$ Tangenten
von D; d.h. die Direktionscurve ist von der $(m+n)$-ten Classe.
Zu demselben Resultate gelangt
man, wenn man nach der
Zahl der Tangenten von D frägt
welche durch einen beliebigen
Punkt o gehen. ~~[illegible]~~
Die durch o gehenden Strahlen bestimmen auf C_2 eine quadratische
Punktinvolution welche mit
den beiden Systemen $(m+n)$ gemeinschaftlicher Paare besitzt (9);
jedes dieser Paare liefert eine
durch o gehende Tangente von D.*

11. Von den $(m+n)$ durch einen Punkt

*Jedes von den involutorischen Paaren liefert eine Doppeltangente von D. Wir sehen also daß die Direktionscurve $\left[\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right]$ Doppeltangenten besitzt.

von C_2 gehenden Tangenten der Direktionscurve fallen zwei zusammen wenn der Punkt ein Verzweigungspunkt eines der beiden Systeme wird. In diesem Falle wird dieser Verzweigungspunkt ein Punkt der Direktionscurve.

Wir erkennen also dass die Direktionscurve D den Kegelschnitt C_2 in den $2m(n-1)+2n(m-1) = 4mn-2(m+n)$ Verzweigungspunkten (6) beider Systeme durchschneidet.

12. Jedes der $(m+n)$ gemeinsamen Elemente (5) stellt zwei einander entsprechende zusammenfallende Elemente dar; hieraus folgt dass D in den gemeinsamen Punkten den Kegelschnitt berührt.†

13. Jeder der $(m+n)$ gemeinsamer Punkte beider Systeme gilt daher ~~[illegible]~~ als Berührungspunkt für zwei Schnittpunkte. Die Curven D, C_2 haben somit

$4mn-2(m+n)+2(m+n) = 4mn$

gemeinsamer Schnittpunkte und da C_2 von der zweiten Ordnung ist, muss D von der $2mn$ ten Ordnung sein.

† Da D von $(m+n)$ ter Classe ist so folgt dass D und C_2 außer den Tangenten in den $(m+n)$ gemeinschaftlichen Berührungspunkten keine weiteren gemeinsamen Tangenten haben.

Die Direktionscurve ist somit eine Curve $2mn$-ter Ordnung.

Da $(m+n)(m+n-1) - 2\left[\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right] = 2mn$ ist so besitzt D außer den aufgezählten Doppeltangenten‡ keine weiteren mehrfachen Tangenten und keine Inflexionstangenten.

‡ (im Allgemeinen)

14. Aus der Classe $(m+n)$, der Ordnung $2mn$ und der Zahl der Doppel~~punkte~~tangenten $\left[\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right]$ kann man nach den Plücker'schen Formeln* die anderen Singularitäten von D finden. Man erhält so:

Zahl der Inflexionstangenten $= 0$

Zahl der Doppelpunkte $= 2mn(mn-5)+4(m+n)$

Zahl der Rückkehrpunkte $= 6mn-3(m+n)$ und das Geschlecht $= (m-1)(n-1)$. φ

* Siehe ihre Ableitung weiter unten.

15. Wenn auf C_2 neben den zwei m-n-deutigen Systemen noch zwei m'-n'-deutige sich vorfinden so liefern sie eine Direktionscurve D' $(m'+n')$-ter Classe welche mit D $(m+n)(m'+n')$ gemeinschaftlicher

φ Für $m=n=1$ hat man auf C_2 zwei projectivische Punktsysteme deren Direktionscurve D das Erzeugniss der beiden Systeme ein den Träger C_2 doppelt berührender Kegelschnitt ist.

Tangenten besitzt. Hieraus schließen wir daß zwei conlocale m-n-deutige und m'-n'-deutige Elementensystemenpaare $(m+n)(m'+n')$ gemeinsammer Elementenpaare besitzen.

Ist von diesen gemeinsammen Elementenpaaren eines involutorisch für das eine Systemenpaar so gilt es für zwei, und ist es involutorisch für beide Systemenpaare so gilt es für vier einfache gemeinsamme Elementenpaare.

II. Symmetrische Elementensysteme

16. Wenn die Gleichung $F(x,y)=0$ symmetrisch ist, so kann man die beiden Systeme, wenn sie conlocal ~~sind~~ und wenn x, y dieselbe Bedeutung haben, nicht mehr von einander unterscheiden. Es bleibt in diesem Falle gleichgiltig ob man x zu dem einen oder dem anderen Systeme rechnet, denn auf Grund der Symmetrie von $F(x,y)=0$

DSI

werden ihm in beiden Fällen dieselben Elemente y entsprechen, und umgekehrt. Es ist klar daß $m = n$ sein muße.

In diesem Falle sagen wir, daß die beiden n-n-deutigen Systeme ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades vorstellen.

Ein Elementensystem ist also dann ein symmetrisches System n-ten Grades wenn nach irgend einem Gesetze jedem Elemente des Systemes n Elemente desselben Systemes entsprechen.

17. Wenn man die Gleichung zweier n-n-deutigen Systeme nach Potenzen von y ordnet, so erhält sie die Form:

$$(A_0 x^n + B_0 x^{n-1} + \dots L_0) y^n + (A_1 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots) y^{n-1} + \dots = 0$$

Soll diese Gleichung symmetrisch sein so muß:

$B_0 = A_1$

$C_0 = A_2 \quad C_1 = B_2$

$D_0 = A_3 \quad D_1 = B_3 \quad D_2 = C_3$

$\vdots$

$L_0 = A_n \quad L_1 = B_n \quad L_2 = C_n$ u.s.w.

Die von einander ~~unabhängigen~~ verschiedenen Coefficienten sind demnach:

$$\begin{matrix} A_0, & A_1, & A_2 & \dots & A_n \\ & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ & & C_2 & \dots & C_n \\ & & & \dots & \\ & & & & L_n \end{matrix}$$

Ihre Zahl ist offenbar $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ und da man einen von den Coefficienten durch Division aus der Gleichung wegschaffen kann so enthält sie nur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ unabhängige Constante. Hieraus folgt daß ein symmetrisches F Elementensystem n-ter Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Elementenpaare bestimmt ist. F

F Zwei symmetrische Elementensysteme sind also identisch wenn sie $\frac{n(n+3)}{2}$ unabhängige Elementenpaare gemeinschaftlich haben.

18. Da ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades nur als spezieller Fall zweier conlocalen n-n-deutigen Gebilde zu betrachten ist, so werden die über gemeinsamme Elemente und Doppelelemente bewiesenen Sätze auch hier Geltung haben.

ad ⓞ

19a)

Man ordne die n dem x entsprechenden Elemente y des Gebildes G_n einander verwandtschaftlich zu. Man erhält dadurch in Gebilde G_n ein symmetrisches Elementensystem vom Grade: $m(n-1)$.

Um nämlich zu einem Elemente y von G_n die ihm in dem symetrischen Elementensysteme entsprechenden Elemente zu finden, muß man die, diesem Elemente in G_m entsprechenden Element x deren es m gibt fixiren und zu ihnen abermals in G_n die entsprechenden Elemente construiren. Nun entsprechen jedem x außer dem schon betrachteten y noch $(n-1)$ andere Elemente von G_n welche dem y in erwähnten symetrischen Elementensysteme zugeordnet sein werden. Deshalb entsprechen in diesem Systeme jedem Element $m(n-1)$ Elemente und somit ist das System vom Grade $m(n-1)$. Die $2m(n-1)$ Doppelelemente erster Art desselben sind aber dann offenbar zugleich die Doppelelemente von G_n. Somit gilt der ~~Satz~~ früher schon in anderer Art entwickelte Satz daß das n-deutige Gebilde $2m(n-1)$ Doppelelemente und folglich auch das m deutige Gebilde $2n(m-1)$ solcher Elemente besitzt. Die Zahlen sind dann zugleich die der Verzweigungselemente in G_m G_n respective.

Aus den gemeinsamen Elementen
werden hier sich selbstentsprechende
Elemente entstehen, d.h. solche Elemente
von denen jedes sich selbstentspricht.
Ihre Zahl ist $n+n = 2n$, und
wir werden sie wohl auch die
<u>Doppelelemente erster Art</u> nennen.

19. Ausser den Doppelelementen erster
Art treten die eigentlichen Doppel-
elemente (6) auf, d.h. solche
Elemente welche durch das Zusammen-
fallen zweier einem und denselben
Elemente entsprechender Elemente
entstehen. Ihre Zahl ist (6) $2n(n-1)$
und wir wollen sie <u>Doppelelemente
der zweiten Art</u> nennen. Jedem
Doppelelemente der zweiten Art
entspricht ein Verzweigungs-
element, so daß also in einem
symetrischen Elementensystem
n-ter Ordnung $2n(n-1)$ Verzweigungselemente,
ebensoviele Doppelelemente zweiter
~~Arten~~, und $2n$ Doppelelemente erster
~~Arten~~ Art ~~entsprechen~~ vorkommen. ¶

Ad ¶ 19)
Von den eben entwickelten Sätzen
ausgehend kann man als
Anwendung die Zahl der
Verzweigungselemente und
der Doppelelemente zweier
m-n-deutigen Gebilde
bestimmen. Es seien G_m G_n
die beiden Gebilde in m-n-
deutiger Beziehung und x, y
zwei einander entsprechende
Elemente; ⊙

20. Wenn mit einem symmetrischen Elementensysteme n-ter Ordnung eine quadratische Involution confocal ist, so kann man wieder nach der Zahl der Elementenpaare fragen welche dem Systeme und der Involution gemeinschaftlich sind. Setzt man in der symmetrischen Gleichung $F(x,y)=0$ wie in Artikel (9) $y=-x$ so ergibt sich eine Gleichung $2n$-ten Grades in welcher jedoch nur gerade Potenzen von x vorkommen da $F(x,y)=0$ symmetrisch ist und $y=-x$ gesetzt wurde. Man hat also für x^2 eine Gleichung n-ten Grades, erhält somit n Werte für x^2 und n Paare von entgegengesetzt bezeichneten Werten für x (nämlich $+\sqrt{x^2}$ und $-\sqrt{x^2}$). Da nun $y=-x$ ist so entsprechen den Werten $+\sqrt{x^2}$, $-\sqrt{x^2}$ für x umgekehrt $-\sqrt{x^2}$ $+\sqrt{x^2}$ als Werte von y. Im Ganzen hat man daher n Elementenpaare der quadratischen Involution welche auch dem symmetrischen Elementensysteme n-ten Grades angehören. ‡

21. Auf Grund der ~~letzten~~ erhaltenen Ergebnisses kann man die Natur der Directionscurve eines auf einem Kegelschnitte befindlichen symmetrischen Punktsystemes n-ten Grades leicht bestimmen. Verbindet man jeden Punkt x des Kegelschnittes mit den n ihm entsprechenden Punkten y so erhält man n durch x gehende Tangenten der Directionscurve D; da außer diesen keine anderen durch x gehenden Tangenten auftreten können, so könnte man schon hieraus schließen, daß die Curve D von der n-ten Classe ist. Hievon überzeugt man sich jedoch auch dadurch, daß man die Zahl der durch einen beliebigen Punkt p gehenden Tangenten bestimmt. Die Strahlen welche durch p hindurchgehen

DSI

schneiden den Kegelschnitt in Punktepaaren einer quadratischen Involution welche nach dem letzten Artikel n Elementenpaare mit dem symmetrischen Systeme gemeinschaftlich hat; jedes dieser Paare liefert also eine von den, durch p gehenden Tangenten der Directionscurve; diese ist somit in der That von der n-ten Classe:

<u>„Die Directionscurve eines symmetrischen auf einem Kegelschnitte befindlichen Punktsystemes n-ten Grades ist eine Curve n-ter Classe."</u>

Jede Tangente dieser Curve schneidet den Kegelschnitt in zwei einander entsprechenden Punkten.

Jede von den 2n Tangenten welche der Directionscurve und dem Kegelschnitte gemeinschaftlich sind berührt also diesen letzteren in einem der 2n Doppelpunkte erster Art.

ad ff in 5.

Anmerkung: Singularitäten ebener Curven.

Es sei C eine ebene algebraische Curve n-ter Ordnung ohne vielfache Punkte oder Spitzen. Jede Gerade ihrer Ebene trifft sie in n Punkten. Man nehme in der Ebene von C zwei ganz beliebige Punkte o p an. Jeder durch p gehende Strahl schneidet C in n Punkten $a_1 a_2 \ldots a_n$ allgemein a und wir wollen nun die von o nach diesen Punkten gehenden n Strahlen oa einander als entsprechend zuordnen. Dadurch entsteht am Punkte o ein symmetrisches Strahlensystem dessen Ordnung offenbar $n(n-1)$ ist. Denn um zu einem Strahle durch o die entsprechenden zu finden hat man seine n Schnittpunkte mit C mit dem Punkte p zu verbinden von welchen Verbindungslinien jede die Curve in $(n-1)$ weiteren Punkten schneidet die mit o verbunden die gesuchten entsprechenden Strahlen liefern.

Jedem Doppelstrahle erster Art entspricht im Büschel p eine durch p gehende Tangente der Curve C. Nun entspricht sich wie man sofort sieht der Strahl op in dem Strahlensysteme $n(n-1)$ mal selbst so daß er $n(n-1)$ Doppelelemente repräsentirt und da das Strahlensystem im Ganzen $2n(n-1)$ Doppelelemente besitzt, so wird es $n(n-1)$ solcher Doppelelemente in dem Strahlensystem geben welche durch p gehende Tangenten der Curve C liefern, d.h.

<u>„Eine allgemeine Curve n-ter Ordnung ist von der $n(n-1)$-ten Classe"</u>

Hat die Curve C in R einen r-fachen Punkt so wird der bei R unendlich nahe ~~dem~~ vorbeigehende Strahl des Büschels O die Curve in r zu R unendlich nahen Punkten und daher jeder aus p nach einem dieser Punkte gehende Strahl in $(r-1)$ weiteren zu R unendlich nahen Punkten. ~~Es~~ Der Strahl OR entspricht sich also $r(r-1)$-mal selbst und stellt daher $r(r-1)$ Doppelelemente des Strahlensystemes vor. Hieraus folgt:

„Ein r-facher Punkt einer ebenen Curve vermindert deren Classenzahl um $r(r-1)$ Einheiten."

Eine Tangente von C berührt diese Curve in einem Punkte x und wird sie in $(n-2)$ weiteren Punkten a schneiden. Wenn zwei von diesen Punkten a zusammenfallen so wird T eine Doppeltangente der Curve. Um die Zahl x der Doppeltangenten der Curve C zu bestimmen nehmen wir abermals einen beliebigen Punkt O in ihrer Ebene an und ordnen die Strahlen Oa welche eine Tangente T liefert einander zu. ~~Um nun die~~ Jede Doppeltangente der Curve liefert nun offenbar zwei Doppelstrahlen erster Art des Systemes da sie in zwei verschiedenen Punkten berührt, so daß also die Zahl der von den Doppeltangenten herrührenden Doppelstrahlen $2x$ ist. Zunächst müssen wir den Grad des Strahlensystemes bestimmen d.h. die Zahl ~~irgend~~ der irgend einem durch O gehenden Strahle entsprechenden Strahlen. Der Strahl schneidet C in n Punkten, von jedem lassen sich an C $[n(n-1)-2]$ Tangenten legen von denen jede in einem Punkte berührt und in weiteren $(n-3)$ Punkten die Curve schneidet. Die nach den letzteren gehenden Strahlen sind die gesuchten und ihre Zahl ist demnach $n(n-3)[n(n-1)-2]$ und dies ist zugleich der Grad des symmetrischen Elementensystemes welches also im Ganzen $2n(n-3)[n(n-1)-2]$ Doppelelemente erster Art aufweisen muß.

Nun sind aber die $n(n-1)$ von O an C gehenden Tangenten mehrfache Doppelstrahlen und zwar findet man leicht daß sich jede dieser Tangenten $(n-2)(n-3)$ mal selbst entspricht so daß alle $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Doppelstrahlen liefern. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$2x + n(n-1)(n-2)(n-3) = 2n(n-3)[n(n-1)-2]$$

woraus sich nach einfacher Reduktion die bekannte Zahl ergibt:

$$x = \frac{n(n-2)(n^2-9)}{2}$$

„Eine allgemeine ebene Curve n-ter Ordnung besitzt $\frac{n(n-2)(n^2-9)}{2}$ Doppeltangenten."

Wenn man dem Strahle oa die Strahlen oa zuordnet so erhält man zwei mehrdeutige Strahlenbüschel am Scheitel o und es ist klar daß die Inflexionspunkte der Curve C die gemeinsamen Strahlen der beiden Büschel liefern. Eine einfache geom. Überlegung zeigt daß die Büschel resp. $n(n-2)$ und $n[n(n-1)-2]$ deutig sind und daher $n(n-2)+n[n(n-1)-2]$ gemeinsame Strahlen besitzen. Jede der durch o gehenden $n(n-1)$ Tangenten von C stellt einen $(n-2)$-fachen gemeinsamen Strahl vor so daß, mit y die Zahl der Inflexionspunkte bezeichnet, die Gleichung gilt:

$$y + n(n-1)(n-2) = n(n-2) + n[n(n-1)-2]$$

woraus sich die bekannte Zahl

$$y = 3n(n-2)$$

ergibt.

„Eine allgemeine Curve n-ter Ordnung besitzt $3n(n-2)$ Inflexionspunkte."

Wenn v ein Schnittpunkt ~~von~~ des Kegelschnittes C_2 mit der Directionscurve D ist so fallen zwei von den n durch v gehenden Tangenten der Directionscurve zusammen, nämlich in der Tangente T von D in v.
Der Punkt v ist also ein Verzweigungspunkt und der zweite Schnittpunkt von C_2 mit T ist der ihm entsprechende Doppelpunkt zweiter Art.
Da es $2n(n-1)$ Verzweigungspunkte gibt so ist die Directionscurve von der $n(n-1)$ten Ordnung, sie wird daher [im Allgemeinen] keine Doppeltangenten und keine Wendetangenten besitzen.
Daß D eine ganz allgemeine Curve n-ter Classe ist, geht daraus hervor, daß man beliebige $\frac{n(n+3)}{2}$ Tangenten derselben wählen kann, denn nach Art. 17 kann man $\frac{n(n+3)}{2}$ ~~beliebige~~ Paare von

Elementen eines symmetrischen Elementen-
systemes n-ten Grades wählen.
Wir haben also den Satz:
„Die Directionscurve $\mathfrak{D}$ ist eine allgemeine Curve n-ter Classe und $n(n-1)$-ter Ordnung welche die $2n$ Tangenten des Kegelschnittes berührt die man an denselben in den $2n$ Doppelpunkten erster Art legen kann; sie geht durch die $2n(n-1)$ Verzweigungspunkte hindurch und berührt in ihnen die Geraden welche den jeweiligen Verzweigungspunkt mit dem ihm entsprechenden Doppelpunkt zweiter Art verbindet."
Und umgekehrt:
„Die Punktepaare welche die Tangenten einer beliebigen Curve $\mathfrak{D}$, n-ter Classe auf einem Kegelschnitte C_2 bestimmen bilden ein symmetrisches Punkt-system n-ten Grades.

Wenn $\mathfrak{D}$ Singularitäten aufweist (Doppel- oder mehrfache Tangenten, Inflexionstangenten u.s.w.) so wird auch das entsprechende symmetrische Punktsystem mit Singularitäten ausgestattet sein.

22. Aus bekannten Sätzen über Curven folgt unmittelbar:
„~~XXX~~ „Wenn sich zwei symmetrische Elementensysteme auf einem Träger befinden (wenn sie conlocal sind) eines von der n-ten und das andere von der n'-ten Ordnung, so haben sie $n.n'$ gemeinschaftlicher Elementenpaare."
„Die n^2 Elementenpaare welche zwei conlocalen symmetrischen Elementen-systemen n-ten Grades gemeinschaftlich sind, sind unendlich vielen anderen Systemen desselben Grades gemeinschaftlich."
„Alle symmetrischen Elementensysteme

n-ten Grades welche $\frac{n(n+3)}{2}-1$ gemeinschaftlicher Elementenpaare besitzen haben auch noch weitere $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gemeinschaftliche Elementenpaare:

„Von den, ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades bestimmenden Elementenpaaren dürfen höchstens $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ einem Systeme p-ten Grades $(p < n)$ angehören."

Wenn die angeführte Gränze überschritten würde, so zerfiele das System n-ten Grades in zwei conlocale Systeme vom $(n-p)$-ten und ~~vom~~ vom p-ten Grade

Der Leser wird gewiß erkennen daß jedem Satze welcher der Theorie ebener Curven entnommen ist ein analoger Satz über symmetrische Elementensysteme entspricht; und umgekehrt ist klar daß man von den symmetrischen

Elementensystemen ausgehend zur Theorie der ebenen Curven gelangen könne.

~~23. Wenn auf dem Kegelschnitte C_2 außer dem symmetrischen Systeme n-ten Grades, eine Involution n-ten Grades vorkommt so kann man nach den beiden gemeinschaftlichen Elementenpaaren fragen. Da die Directionscurve des Systemes von der n-ten und die Involutionscurve von der (n-1)-ten Classe ist so haben beide n(n-1) gemeinschaftlichen Tangenten da.~~

~~„Ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades hat mit einer conlocalen Involution n-ten Grades n(n-1) gemeinschaftliche Elementenpaare"~~

23. Eine Involution ist offenbar nur als ein spezieller Fall eines symmetrischen Elementensystemes zu betrachten. Denn, da bei einer Involution vollkommene Vertauschungsfähigkeit innerhalb einer Gruppe ~~xxx~~

giltig ist so muss die, zwischen den Parametern ~~zwei~~ x, y zweier entsprechenden, d. h. derselben Gruppe angehörenden Elemente bestehende Gleichung in Bezug auf x und y symmetrisch sein.

Jede Gruppe einer Involution n-ten Grades enthält n Elemente welche einander gegenseitig entsprechen; jedem Elemente entsprechen daher $(n-1)$ Elemente d. h.:

„Eine Involution n-ten Grades stellt ein (spezielles) symmetrisches Elementensystem $(n-1)$-ten Grades dar."

Die $2(n-1)$ Doppelelemente der Involution stellen offenbar die Doppelelemente erster Art vor. Jede Gruppe welche eines dieser Doppelelemente enthält, enthält außer ~~dem~~ demselben weitere $(n-2)$ Elemente welche alle dem Doppelelemente

ad # in 7 Anmerkung: Involutionen mit mehrfachen Elementen.

Von der Involutionsgleichung $f(x) - y\,\varphi(x)$ ausgehend kann man die Doppelelemente finden indem man die Gleichheit zweier Wurzeln dieser Gleichung zum Ausdrucke bringt, was durch das Verschwinden der Discriminante von $f(x) - y\,\varphi(x)$ geschieht. Diese ist in y vom Grade $2(n-1)$ und jeder Wurzel der Discriminante entspricht eines der $2(n-1)$ Doppelelemente der Involution.

Man kann auch unmittelbar die Gleichung $2(n-1)$-ten Grades entwickeln deren Wurzeln die Parameter der Doppelelemente der Involution sind. So ergibt sich nach ( ) für die Doppelelemente einer quadratischen Involution die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0,$$

für die Doppelelemente einer cubischen Involution:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} x^4 + 2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x^3 + \left\{ 3 \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} \right\} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{u.s.w.}$$

Wenn sämmtliche n Elemente einer Gruppe zusammenfallen so entsteht ein n-faches Element der Involution, dasselbe vertritt $(n-1)$ Doppelelemente so daß außer ihm nur noch $(n-1)$ Doppelelemente auftreten. Denn betrachten wir das n-fache Element als jenes dessen Parameterwert gleich Null ist so lautet die Gleichung der Involution

$$x^n - y\,\varphi(x) = 0 :$$

Die Beziehungsgleichung zwischen zwei einander entsprechenden Elementen $x\,x'$ der Involution lautet in diesem Falle:

$$\left(\frac{1}{x-x'}\right)\left[b_{n-1}(x^n x'^{n-1} - x^{n-1}x'^n) + b_{n-2}(x^n x'^{n-2} - x^{n-2}x'^n) + \dots\dots b_0(x^n - x'^n)\right] = 0$$

oder nach verrichteter Division mit $(x - x')$:

$$b_{n-1}x^{n-1}x'^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2}x'^{n-2}(x+x') + b_{n-3}x^{n-3}x'^{n-3}(x^2+xx'+x'^2) + \dots$$

$$\dots b_0(x^{n-1} + x^{n-2}x' + \dots\dots x'^{n-1}) = 0$$

wobei die b_κ die Coefficienten von x^κ in $\varphi(x)$ sind.
Wenn $x' = x$ gesetzt wird so ergibt sich für die $2(n-1)$ Doppelelemente die Gleichung:

$$x^{n-1}\left[b_{n-1}x^{n-1} + 2b_{n-2}x^{n-2} + 3b_{n-3}x^{n-3} + \dots\dots n b_0\right] = 0$$

woraus hervorgeht dass $x=0$ ein $(n-1)$faches Doppelelement der Involution darstellt, der zweite Factor der letzten Gleichung liefert die übrigen Doppelelemente

Von besonderem Interesse sind jene Involutionen welche zwei n-fache Elemente besitzen. Vorausgesetzt dass die beiden n-fachen Elemente reell sind kann man ihnen die Parameterwerte 0 und ∞ ertheilen und erhält als Gleichung der Involution

$$x^n - y = 0$$

DSI

ad [H] in ...

Setzt man also $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \alpha$ so können (wenn $k=0,1,2\dots n-1$ gesetzt wird) die eine Gruppe bildenden Werte dargestellt werden durch:

$$y'\quad y'\alpha\quad y'\alpha^2\quad y'\alpha^3 \dots\dots y'\alpha^{n-1}$$

irgend zwei unter diesen Werten haben α^k zum Verhältnisse bilden also entsprechende Werte in zwei projectivischen Systemen mit 0 und ∞ als Doppelwerten. Wenn man sich also $(n-1)$ projectivische Systemenpaare denkt welche alle 0 ∞ zu Doppelwerten besitzen und deren charakteristische Doppelverhältnisswerte (Werte des Doppelverhältnisses den zwei entsprechende Elemente mit den Doppelelementen bestimmen) die außer 1 entsprechenden n-ten Wurzeln der positiven Einheit sind also $\alpha\ \alpha^2 \dots \alpha^{n-1}$ so erhält man die sämmtlichen ~~ein~~ mit einem Elemente y' eine Gruppe ~~bildenden~~ der Involution bildenden ~~Werte~~ Elemente wenn man zu dem Elemente y' die in jenen $(n-1)$ Systemen projectivisch entsprechenden Elemente aufsucht.

Wählt man irgend vier Elementengruppen welche den Werten $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ resp. $y_1'\ y_2'\ y_3'\ y_4'$ entsprechen so stellen sich ihre Elemente durch die Parameterwerte dar:

I $y_1'\ \alpha y_1'\ \alpha^2 y_1' \dots \alpha^k y_1' \dots \alpha^{n-1} y_1'$

II $y_2'\ \alpha y_2'\ \alpha^2 y_2' \dots \alpha^k y_2' \dots \alpha^{n-1} y_2'$

III $y_3'\ \alpha y_3'\ \alpha^2 y_3' \dots \alpha^k y_3' \dots \alpha^{n-1} y_3'$

IV $y_4'\ \alpha y_4'\ \alpha^2 y_4' \dots \alpha^k y_4' \dots \alpha^{n-1} y_4'$

so ist wie auch aus dem früheren unmittelbar geschlossen werden kann dass Doppelverhältniss ~~von~~ von vier beliebigen Elementen aus ~~vier~~ den vier Gruppen etwa $\frac{y_1'-y_3'}{y_2'-y_3'} : \frac{y_1'-y_4'}{y_2'-y_4'}$ gleich dem Doppelverhältnisse der in einem der (n-1) projectivischen Systemen entsprechenden Elemente derselben Gruppen allgemein

$$\frac{\alpha^k y_1' - \alpha^k y_3'}{\alpha^k y_2' - \alpha^k y_3'} : \frac{\alpha^k y_1' - \alpha^k y_4'}{\alpha^k y_2' - \alpha^k y_4'}.$$

I m a

oder

$$x^n = y$$

Die n eine Gruppe constituirenden Elemente sind gegeben durch die Gleichung

$$x = \sqrt[n]{y} = y'\sqrt[n]{1} = y'\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

wenn man den absoluten Wert von $\sqrt[n]{y}$ mit y' bezeichnet. III

~~Zwei einer Gruppe angehörigen Werte Elemente $x\ x'$ sind gegeben durch $x^n = x'^n = y$ daher ... die Relation $x' = x\sqrt[n]{1}$ besteht. Hieraus folgt aber unmittelbar dass $x\ x'$ zwei einander projectivisch zugeordneten Systemen angehören welche die Elemente mit den Parametern 0 ∞ zu Doppelelementen besitzen.~~

17

Sind die beiden n-fachen Elemente nicht reell ~~(Das f~~ und bezeichnet man ihre Parameter mit a, b [der Fall der Realität ist offenbar mit eingeschlossen] so sind die beiden n-fachen Elemente (als Gruppen) dargestellt durch $(x-a)^n = 0$ $(x-b)^n = 0$ also die Involution durch

$$(x-a)^n - y(x-b)^n = 0$$

woraus sich

$$x = \frac{a - b\sqrt[n]{y}}{1 - \sqrt[n]{y}}$$

ergibt:

Denkt man sich y positiv und bezeichnet man den absoluten Wert von $\sqrt[n]{y}$ mit y' so lassen sich die n Werte von $\sqrt[n]{y}$, n als ungerade vorausgesetzt in der Form schreiben

$$y' \quad \alpha y' \quad \alpha^2 y' \quad \ldots \quad \alpha^{n-1} y'$$

wobei

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

zu setzen ist.

Betrachten wir nun vier beliebige Gruppen der Involution I, II, III, IV, welche der Reihe nach den Werten $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ entsprechen so erhält man für die Parameter ~~werte~~ der Elemente dieser Gruppen die Werte:

$$\text{I} \ldots x_1^1 = \frac{a - b y'_1}{1 - y'_1}, \quad x_2^1 = \frac{a - \alpha b y'_1}{1 - \alpha y'_1}, \quad x_3^1 = \frac{a - \alpha^2 b y'_1}{1 - \alpha^2 y'_1}, \ldots$$

$$\text{II} \ldots x_1^2 = \frac{a - b y'_2}{1 - y'_2}, \quad x_2^2 = \frac{a - \alpha b y'_2}{1 - \alpha y'_2}, \quad x_3^2 = \frac{a - \alpha^2 b y'_2}{1 - \alpha^2 y'_2}, \ldots$$

$$\text{III} \ldots x_1^3 = \frac{a - b y'_3}{1 - y'_3}, \quad x_2^3 = \frac{a - \alpha b y'_3}{1 - \alpha y'_3}, \quad x_3^3 = \frac{a - \alpha^2 b y'_3}{1 - \alpha^2 y'_3} \ldots$$

$$\text{IV} \ldots x_1^4 = \frac{a - b y'_4}{1 - y'_4}, \quad x_2^4 = \frac{a - \alpha b y'_4}{1 - \alpha y'_4}, \quad x_3^4 = \frac{a - \alpha^2 b y'_4}{1 - \alpha^2 y'_4}, \ldots$$

Bildet man nun die Doppelverhältnisse aus ~~den~~ je vier unter einander stehenden Parameterwerten so ergibt sich nach leichter Reduktion:

$$\frac{x_1^1 - x_1^3}{x_1^2 - x_1^3} : \frac{x_1^1 - x_1^4}{x_1^2 - x_1^4} = \frac{x_2^1 - x_2^3}{x_2^2 - x_2^3} : \frac{x_2^1 - x_2^4}{x_2^2 - x_2^4} = \frac{x_3^1 - x_3^3}{x_3^2 - x_3^3} : \frac{x_3^1 - x_3^4}{x_3^2 - x_3^4} = \ldots = \frac{y'_1 - y'_3}{y'_2 - y'_3} : \frac{y'_1 - y'_4}{y'_2 - y'_4}$$

~~Wie~~ Man zu demselben Resultate gelangt wenn man n negativ und n entweder gerade oder ungerade annimmt. ~~[illegible]~~ ~~Arbeit~~:

~~„Besitzt eine Involution n-ten Grades zwei n-fache Elemente, so gruppieren sich die Elemente sämmtlicher Gruppen zu projectivischen Gebilden welche die beiden Doppelelemente zu n-fachen Elementen der Doppelelemente haben.“~~

Bildet man das Doppelverhältniss welches irgend zwei Elemente einer Gruppe etwa x'_k und x'_l mit den beiden n-fachen Elementen a, b bestimmen so ergibt sich

$$\frac{a - x'_k}{b - x'_k} : \frac{a - x'_l}{b - x'_l} = \left[\frac{a - \dfrac{a - \alpha^{k-1} b y'_1}{1 - \alpha^{k-1} y'_1}}{b - \dfrac{a - \alpha^{k-1} b y'_1}{1 - \alpha^{k-1} y'_1}}\right] : \left[\frac{a - \dfrac{a - \alpha^{l-1} b y'_1}{1 - \alpha^{l-1} y'_1}}{b - \dfrac{a - \alpha^{l-1} b y'_1}{1 - \alpha^{l-1} y'_1}}\right]$$

$$= \alpha^{k-l} = \text{const.}$$

Die beiden Elemente x'_k x'_l sind also einander entsprechende Elemente in zwei projectivischen Systemen deren Doppelelemente die beiden n-fachen Elemente a b sind, wobei das charakteristische Doppelverhältniss $(a\,b\,x'_k\,x'_l)$ eine n te Wurzel aus der Einheit ist. Wir haben somit den ~~...~~ Satz:

„Wenn eine Involution n-ten Grades zwei n-fache Elemente ~~...~~ a, b besitzt, so gruppiren sich die Elemente der einzelnen Gruppen in projectivische Systeme deren gemeinschaftliche ~~Elem~~ Doppelelemente die beiden n-fachen Elemente ~~sind~~ a, b sind und deren charakteristische Doppelverhältnisse die n-ten Wurzeln der Einheit sind."

Die Elemente jeder Gruppe bilden ein cyklisch projectivisches System da man von einem Elemente ausgehend immer zu den sämmtlichen übrigen gelangt wenn man der Reihe nach die diesem Elemente projectivisch zugeordneten Elemente bestimmt. (Siehe Vorhergehendes)

DSI

entsprechen. In diesen Verzweigungsgruppen haben wir also die 2(m-1)(m-2) Verzweigungselemente der Involution zu suchen, woraus folgt dass jedes der 2(m-1) Doppelelemente erster Art auch (m-2) Doppelelemente der zweiten Art vertritt. ‡ — ⊥ 2(m-1)

24. Aus dem früheren folgt nun unmittelbar, dass die Verbindungslinien einander entsprechender Punkte einer, auf einem Kegelschnitt befindlichen Punktinvolution eine Curve (m-1)ter Classe und (m-1)(m-2)-ter Ordnung ohne Doppel- und Inflexionstangenten einhüllen welche wir die „Involutionscurve" J nennen wollen. Diese Curve J berührt jene Tangenten von C_2 welche man an C_2 in den 2(m-1) Doppelpunkten der Involution legen kann, und ferner schneidet J den Kegelschnitt C_2 in den 2(m-1)(m-2) ~~Punkt~~

⊥ C_2

φ m-ten Grades

Verzweigungspunkte welche den $2(m-1)$ Verzweigungsgruppen als einfache Elemente angehören. Ebenso erkennt man daß $\underline{I}$ in allen einfachen Punkten einer Verzweigungsgruppe von Geraden berührt wird welche durch den, ~~den Dop~~ der Verzweigungsgruppe ~~an~~ angehörigen Doppelpunkt hindurch gehen.

Es ist hieraus schon zu sehen daß die durch Involutionen bestimmten Curven $\underline{I}$ (Involutionscurven) keine allgemeinen Curven sind obzwar sie keine Doppeltangenten und keine Inflexionstangenten bestimmen.

25. Wenn auf dem Kegelschnitte C_2 außer der Involution m-ten Grades noch ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades vorkommt, so kann man fragen nach den Elementenpaaren welche dem Systeme und der Involution gemeinschaftlich sind. Da die Directionscurve $\underline{D}$ des Systemes vom n-ten Grade und die Involutionscurve vom $(m-1)$-ten Grade ist so haben beide $n(m-1)$ gemeinschaftlicher Tangenten, d.h.:

„Ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades hat mit einer conlocalen Involution m-ten Grades $n(m-1)$ gemeinschaftliche Elementenpaare."

26. Durch dieselbe Betrachtung erhält man die folgenden Resultate:

„Wenn sich auf einem und demselben Träger zwei m-n-deutige Elementensysteme und ein symmetrisches Elementensystem p-ten Grades vorfindet so gibt es $(m+n)p$ Elementenpaare des Systemes welche auch den zwei mehrdeutigen Gebilden als Paare entsprechender Elemente angehören".

DSI

„Wenn sich auf einem und demselben Träger zwei m-n-deutige Systeme und eine Involution Q-ten Grades befinden so gibt es $(m+n)(Q-1)$ den Systemen und der Involution gemeinschaftlicher Elementenpaare."

„Wenn sich auf demselben Träger eine Involution Q-ten Grades und ein symmetrisches Elementensystem p-ten Grades befinden so gibt es $(Q-1)p$ beiden gemeinschaftlicher Elementenpaare."

„Zwei conlocale Involutionen von den resp. Ordnungen Q, Q_1 haben $(Q-1)(Q_1-1)$ gemeinschaftlicher Elementenpaare."

Für $Q_1 = Q$ wird die Zahl gemeinschaftlicher Elementenpaare $= (Q-1)^2$.

27. Befindet sich auf einem Träger außer einer Involution p-ten Grades

noch eine Involution Q-ten Grades und entspricht jeder Gruppe einer Involution nach irgendeinem (linearen) Gesetze eine einzige Gruppe der zweiten Involution so nennen wir die beiden zwei projektivische Involutionen.

Zwei Elemente welche einander entsprechenden Gruppen angehören kann man als einander entsprechende Elemente bezeichnen und dann ist klar daß die beiden Involutionen nur einen speziellen Fall von zwei p-Q-deutigen Gebilden vorstellen. Diese beiden Gebilde haben also $(p+Q)$ gemeinsammer Elemente welche man dann die gemeinsammen Elemente der projektivischen Involutionen nennt.

Es ist klar daß man auch von zwei m-n-deutigen Involutionen und ihren gemeinsammen Elementen sprechen kann, wie groß ist die Zahl

dieser Elemente?

28. Wenn auf dem Kegelschnitte C_2 eine Involution m-ten Grades sich befindet so enthält jede Gruppe m Punkte welche $\frac{m(m-1)}{2}$ Verbindungslinien liefern. Diese Linien sind die Seiten des vollständigen m-Eckes welches von der Punktgruppe bestimmt wird. Wie wir bewiesen haben berühren diese Verbindungslinien die Involutionscurve J welche von der $(m-1)$-ten Classe ist. Da man zwei Gruppen einer Involution willkürlich wählen kann, und da diese dann alle übrigen Gruppen bestimmen so haben wir den Satz:

„Die $m(m-1)$ Seiten zweier vollständiger, einem Kegelschnitte eingeschriebener m-Ecke berühren eine Curve $(m-1)$ter Classe, welcher unendlich viele vollständige m-Ecke umschrieben sind, die dem Kegelschnitte C_2 gleichzeitig eingeschrieben sind."

Eine Curve $(m-1)$-ter Classe ist durch $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ Tangenten bestimmt, die beiden m-Ecke liefern also um

$$m(m-1) - \frac{(m-1)(m+2)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

Tangenten mehr als zur Bestimmung nothwendig wäre.

29. Wenn dem Kegelschnitte C_2 ein m-Eck eingeschrieben ist, und wenn J eine ~~Curve~~ beliebige Curve $(m-1)$-ter Classe ist welche die sämmtlichen $\frac{m(m-1)}{2}$ Seiten des vollständigen m-Eckes berührt so kann man leicht nachweisen daß J eine Involutionscurve ist. Man denke sich von einem beliebigen Punkte x_1 des Kegelschnittes C_2 an J die $(m-1)$ Tangenten gelegt welche C_2 in den Punkten $x_2\, x_3\, x_4 \dots x_m$

schneiden mögen und betrachte
die Ecken des m-Eckes und die
m Punkte $x_1 x_2 \ldots x_m$ als zwei
Gruppen einer Involution
m-ten Grades. Die Involutions
curve derselben hat mit J
offenbar $\frac{m(m-1)}{2} + (m-1) = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$
Tangenten gemeinschaftlich, also
genau so viele als zur Bestimmung
einer Curve (m-1)-ter Classe
nothwendig sind. Beide Curven
müssen also identisch sein, wenn
nur die $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ Tangenten
nicht einem Systeme von $(m-1)^2$ gemeinschaftlicher
Tangenten ~~einer~~ zweier Curven
(m-1)-ter Classe angehören. Dies
ist jedoch in der That nicht der
Fall; denn da von jenen Tangenten
je (m-1) durch ~~einen~~ den Punkt x_1 gehen
so müssten die übrigen $\frac{m(m-1)}{2}$,

DSI

von denen abermals je (m-1) durch
einen Punkt gehen, einer Curve
(m-2)-ter Classe angehören welche
somit durch die m Ecken
des m-Eckes dargestellt sein
müsste was unmöglich ist.
Hiedurch ist nachgewiesen:
„Wenn man einem vollständigen
m-Ecke welches einem Kegelschnitte
C_2 eingeschrieben ist eine beliebige
Curve J (m-1)-ter Classe umschreibt
so gibt es unendlich viele vollständige
m-Ecke welche C_2 eingeschrieben
und J umschrieben sind; die Eckengruppen
derselben bilden eine Involution
m-ten Grades."

30. Eine vollständige Punktgruppe
einer auf C_2 befindlichen Involution
m-ten Grades liefert $\frac{m(m-1)}{2}$
Tangenten der Involutionscurve
J welche von der (m-1)ten Classe ist und

zu deren Bestimmung man also im Ganzen $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ Tangenten braucht. Man kann also außer jenen $\frac{m(m-1)}{2}$ Tangenten noch weitere $(m-1)$ beliebig wählen; jede von diesen ist durch ein auf C_2 beliebig gewähltes Punktepaar der Involution bestimmt. Somit haben wir den Satz:

„Eine Involution m-ten Grades ist durch eine vollständige Gruppe und weitere $(m-1)$ beliebige Elementenpaare vollkommen bestimmt."

31: Aus diesem Satze folgt sofort, daß die „Directionscurve eines symmetrischen Elementensystemes $(m-1)$-ten Grades, einem vollständigen Fals m-Eck eingeschrieben, eine Involutions curve sein wird, wenn in dem

symmetrischen Systeme eine m-elementige Gruppe vorhanden ist deren Elemente sich sämmtlich gegenseitig (vertauschungsfähig) entsprechen. In diesem Falle ist also das Elementensystem $(m-1)$-ten Grades eine Involution m-ten Grades.

„Wenn es in einem symmetrischen Elementensysteme $(m-1)$-ten Grades eine ~~einzige~~ Gruppe von m solchen Elementen gibt, daß jedes alle übrigen zu entsprechenden Elementen hat, so ist das System eine Involution m-ten Grades;"

d. h. es gibt unendlich viele solcher Gruppen daß u. s. w.

32 Hierdurch ist von neuem bewiesen daß man die Involutionen m-ten Grades nur als spezielle Fälle der symmetrischen Elementensysteme $(m-1)$-ten Grades

zu betrachten hat, und daß
ein solches System sofort in
eine Involution übergeht
wenn im Bereiche einer
m-elementigen Gruppe vollkommene
Vertauschungsfähigkeit herrscht.

32. Denkt man sich dem Kegelschnitte C_2
ein festes m-Eck eingeschrieben
und von den Ecken eines zweiten
solchen eingeschriebenen m-Eckes welches mit jenem eine Involution m-ten Grades bestimmt,
(m-1) Ecken fest, und die letzte
beweglich, so wird es unendlich
viele Involutionscurven I geben,
welche den einzelnen Lagen der
beweglichen Ecke entsprechen. Alle
diese Curven von der (m-1)-ten
Classe haben die $\frac{m(m-1)}{2}$ Seiten
des festen m-Eckes und die
festen $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Seiten des zweiten
m-Eckes zu Tangenten; d. i.
im Ganzen $(m-1)^2$ gemeinschaftlicher

DSI

Tangenten; diese Curven bilden
also eine Curvenreihe (reciprokes
Gebilde zum Curvenbüschel).
Da die festen Ecken des zweiten
m-Eckes ein (m-1)-Eck darstellen,
so haben wir den Satz:

„Die Seiten eines vollständigen
m-Ecks und eines vollständigen
(m-1)-Ecks welche beide einem
Kegelschnitte eingeschrieben
sind stellen ein System von
$(m-1)^2$ gemeinschaftlicher Tangenten
zweier (und unendlich vieler)
Curven (m-1)-ter Classe dar."

33. Die symmetrischen Elementensysteme
treten unter anderem auch in den mehr-
deutigen Elementargebilden auf. Wenn G_m (Elementarsystemen)
G_n zwei m-n-deutige Elementargebilde
sind d. h. wenn jedem Elemente x von
G_m n Elemente y von G_n entsprechen
so bilden offenbar diejenigen Elementenpaare von G_n
welche einem und demselben Elemente von G_m

entsprechen, ein symmetrisches Elementensystem vom Grade $m(n-1)$. Denn wählt man ein beliebiges y in G_n so entsprechen ihm m Elemente x in G_m, und jedem dieser Elemente x entsprechen wieder außer y noch weitere $(n-1)$ Elemente y' in G_n; zusammen gibt es also $m(n-1)$ Elemente y' in G_n welche mit einem beliebigen y Elementenpaare bilden welche gewissen Elementen von G_m entsprechen.

„Wenn zwei Gebilde in $m-n$-deutiger Beziehung sind so stellt das n deutige Gebilde für sich ein symetrisches Elementensystem $m(n-1)$-ten Grades dar, und das m deutige Gebilde ein sym. Elementensystem $n(m-1)$-ten Grades."

In diesen sym. Systemen treten nähmlich je zwei solche Elemente als einander entsprechende auf, welche einem und demselben Elemente des zweiten Gebildes entsprechen.

Das in G_m auftretende symmetrische Elementensystem $n(m-1)$-ten Grades hat $2n(m-1)$ Doppelelemente erster Art welche offenbar die Doppelelemente des m-deutigen Gebildes G_m sind; ebenso sind die $2m(n-1)$ Doppelelemente erster Art im symmetrischen Systeme G_n, die Doppelelemente des n-deutigen Gebildes G_n.

Hiedurch sind wir abermals zu den Resultaten des 6. Artikels gelangt. Welche Bedeutung haben die in den betrachteten sym. Elementensystemen auftretenden Doppelelemente der zweiten Art?

34. Hat man ein symmetrisches Elementensystem n-ten Grades und sind $y\,y'$ zwei von den, dem Elemente x entsprechenden n Elementen so kann man auch $y\,y'$ als einander entsprechende Elemente betrachten und da ist klar daß das Paar $y\,y'$ abermals einem sym. Elementensysteme angehört dessen Grad wir sehr leicht in der folgenden Weise bestimmen können. Dem y entsprechen n Elemente x; jedem dieser x, entsprechen außer dem y noch weitere $(n-1)$ y' so daß

jedem y $n(n-1)$ Elemente y' entsprechen. Das Elementenpaar yy' bildet also ein neues sym. Elementensystem $n(n-1)$-ten Grades, welches wir das „abgeleitete sym. System" nennen wollen. Wenn ein y mit einem y' zusammenfällt so wird offenbar y ein Doppelelement zweiter Art für das ursprüngliche System n-ten Grades, dies stimmt auch in den Zahlen vollkommen überein, denn das „abgeleitete System hat $2n(n-1)$ Doppelelemente erster Art welche zugleich die Doppelelemente zweiter Art für das ursprüngliche Elementensystem n-ten Grades sind:

„Wenn man zwei solche Elemente (yy') welche einem und demselben Elemente (x) in einem sym. Elementensysteme n-ten Grades als einander entsprechende Elemente betrachtet so erhält man ein neues sym. Elementensystem $n(n-1)$-ten Grades — das abgeleitete System —, ~~dessen~~ welches die Doppelelemente zweiter Art des ursprünglichen Systemes zu Doppelelementen erster Art hat."

Aus dem abgeleiteten sym. Elementensysteme $n(n-1)$-ten Grades kann man abermals ein neues ableiten welches vom Grade $n(n-1)[n(n-1)-1]$ sein wird und welches wir consequenter Weise das „zweite abgeleitete System" nennen müssten. u.s.w.

35. Um die abgeleiteten Systeme näher studieren zu können, denken wir uns dieselben als Punktsysteme auf einem festen Kegelschnitte C_2. Es sei S_n das ursprünglich sym. Punktsystem n-ten Grades auf C_2 und $S_{n(n-1)}$ das abgeleitete sym. Punktsystem $n(n-1)$-ten Grades.

Je zwei entsprechenden Punkte yy' von $S_{n(n-1)}$ entsprechen einem und demselben Punkte x von S_n.

DSI

Während die Geraden $xy, xy' \ldots$ die Directionscurve $\mathfrak{D}^n$ des Systemes S_n einhüllen, umhüllen die Geraden yy' die Directionscurve $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ des Systemes $S_{n(n-1)}$; die Curve $\mathfrak{D}^n$ ist bekanntlich von der n-ten Classe und $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ von der $n(n-1)$-ten Classe. Wir haben also den Satz: „wenn von den drei Seiten eines, einem festen Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks zwei auf einer festen Curve n-ter Classe hingleiten so umhüllt die dritte Seite eine Curve $n(n-1)$-ter Classe."

Wenn v einer der ~~$2n(n-1)$~~ Durchschnittspunkte von C_2 mit $\mathfrak{D}^n$ ist und d der zweite Schnittpunkt von C_2 mit der in v an ~~$\mathfrak{D}$~~ $\mathfrak{D}^n$ gelegten Tangente so ist v ein Verzweigungspunkt von S_n und d ein Doppelpunkt zweiter Art; zugleich ist jedoch d ein Doppelpunkt erster Art für das sym. System $S_{n(n-1)}$.

Die Tangenten von C_2 in den $2n(n-1)$ Punkten d sind also zugleich ~~die~~ Tangenten von $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$.

Wie entstehen nun die Doppelelemente zweiter Art von $S^{n(n-1)}$; dies kann in doppelter Weise entstehen: a) Durch jeden Punkt v gehen ausser der Tangente vd welche $\mathfrak{D}^n$ in v berührt noch weitere $(n-2)$ Tangenten an $\mathfrak{D}^n$; es sei $\underline{w}$ ~~w~~ der zweite Schnittpunkt von C_2 mit einer solchen Tangente. Wenn man nun zu $\underline{w}$ die entsprechenden Punkte des Systemes $S^{n(n-1)}$ bestimmt so findet man ~~daß~~ leicht daß von ihnen zwei in ~~w~~ d zusammenfallen.[^1] Jeder Punkt v liefert also $(n-2)$ Verzweigungspunkte $\underline{w}$ von $S^{n(n-1)}$ welchen ~~w~~ gleichzeitig d als ($(n-2)$-faches) Doppelelement entspricht. Zusammen haben ~~wir~~ wir also $2n(n-1)(n-2)$

[^1]: Man muss nämlich um zu einem beliebigen Punkte y die ihm in $S^{n(n-1)}$ entsprechenden Punkte y' zu finden, durch y an $\mathfrak{D}^n$ die n Tangenten ziehen welche C_2 in n Punkten x schneiden. Durch jeden dieser Punkte x gehen an $\mathfrak{D}^n$ außer xy noch weitere $(n-1)$ Tangenten welche C_2 in den gesuchten Punkten y' schneiden.

solcher Verzweigungselemente v welche sich in $2n(n-1)$ Gruppen von $(n-2)$ Elementen gruppieren; jede Gruppe hat eines von den $2n(n-1)$ Doppelelementen erster Art zum gemeinschaftlichen (also $(n-2)$-fachen) Doppelelemente zweiter Art. b) Durch jeden der Punkte $\underline{d}$ gehen ausser δv an D^n noch weitere $(n-1)$ Tangenten; es sei δ ~~m~~ der zweite Schnittpunkt einer von ~~der~~ diesen Tangenten mit dem Kegelschnitte C_2. Wenn man nun zum Punkte $\underline{v}$ abermals die entsprechenden Punkte im Systeme $S^{n(n-1)}$ construirt, so findet man dass zwei von ihnen in $\underline{\delta}$ zusammenfallen, da von den durch ~~va~~ $\underline{v}$ an D^n gehenden Tangenten F in $v\,d$ zusammenfallen. ? F zwei Die $(n-1)$ Punkte δ sind also

DSI

12

Doppelpunkte zweiter Art und haben $\underline{v}$ zum gemeinschaftlichen (also $(n-1)$-fachen) Verzweigungselemente. Solcher Doppelpunkte gibt es daher im Ganzen $2n(n-1)(n-1)$ $\underline{= 2n(n-1)^2}$. Da die $(n-1)$ Geraden $v\delta$ Tangenten von $D^{n(n-1)}$ in v sind so ergibt sich dass jeder der Punkte $\underline{v}$ ein $(n-1)$-facher Punkt der Directionscurve $D^{n(n-1)}$ ist. Diese Curve hat also [$2n(n-1)$ [auf C_2 Punkte $\underline{v}$ von denen jeder ein $(n-1)$ facher Punkt ist. c) Schliesslich liefert jedes einfache dem Kegelschnitte C_2 ~~um~~eingeschriebene und der Directionscurve D^n umschriebene Viereck vier Doppel- und Verzweigungspunkte. Denn es sei $abcd$ ein solches Viereck also ab, bc, cd, da Tangenten von D^n dann stellt offenbar c z.B. zwei zusammenfallende Punkte dar welche im Systeme $S^{n(n-1)}$ dem Elemente a entsprechen; ebenso

ist jeder der ~~beiden~~ anderen
drei Punkte a, b, d ein Doppelpunkt
zweiter Art für $S^{n(n-1)}$ welchem die
Gegenecke des Viereckes als Verzweigungs-
punkt entspricht. Die vier Ecken
eines solchen Viereckes sind also
zugleich Doppelpunkte zweiter
Art und Verzweigungspunkte
von $S^{n(n-1)}$ und zwar entspricht
jedem von ihnen als Doppelpunkt
betrachtet die gegenüberliegende
Ecke als Verzweigungspunkt.
Hieraus folgt aber daß die
Diagonalen $\overline{ac}$ $\overline{bd}$ des Viereckes
Doppeltangenten von $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ sind,
denn von den, durch a gehenden
Tangenten t fallen zwei in $\overline{ac}$ und t der Curve $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$
ebenso von den durch c gehenden
Tangenten, es können daher a und c im Allgemeinen
nicht Punkte von $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ sein
sondern $\overline{ac}$ (und ebenso $\overline{bd}$) muß eine
Doppeltangente von $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ sein.
Die Zahl der Doppeltangenten können
wir nun sehr leicht bestimmen, da wir

nun wissen wo die sämmtlichen Schnitte
von $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ mit C_2 zu suchen sind;
zunächst haben wir die $2n(n-1)(n-2)$ Verzweigungs-
Punkte w und dann die $2n(n-1)$
Punkte $\underline{v}$ von denen jeder ein $(n-1)$-facher
Punkt ist. ausser diesen Punkten gibt
es keine den Curven $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ und C_2 gemeinsamen
Punkte mehr. Es hat also C_2 mit $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$
im Ganzen $2n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)(n-1)$
$= 2n(n-1)(2n-3)$ Schnitte und folglich:
„ist die Directionscurve $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ des
abgeleiteten sym. Punktsystemes von
der $n(n-1)(2n-3)$-ten Ordnung."
Die Reduktion der Ordnung welche
im Allgemeinen ~~würde~~ $n(n-1)[n(n-1)-1]$
sein sollte da $\mathfrak{D}^{n(n-1)}$ von der $n(n-1)$-ten
Classe ist, wird bewerkstelligt durch
jene Doppeltangenten deren Existenz wir
so eben erkannt haben. Wenn
also Δ die Zahl der Doppeltangenten
ist (Wendetangenten würde es im Allgemeinen
nicht geben) so hat man auf Grund der

bekannten Formeln von Plücker die Gleichung:

$$2\Delta = n(n-1)\left[n(n-1)-1\right] - n(n-1)(2n-3)$$

woraus folgt

$$\Delta = n(n-1)^2(n-2)$$

„Die Directionscurve $\delta^{n(n-1)}$ des abgeleiteten sym. Punktsystemes hat $n(n-1)^2(n-2)$ Doppeltangenten."

Zu demselben Resultate würden wir gelangen wenn wir nach den uns noch in a) und b) fehlenden Verzweigungspunkten fragen würden. Denn $\delta^{n(n-1)}$ muss im Ganzen $2n(n-1)\left[n(n-1)-1\right]$ Verzweigungspunkte haben; wenn wir hievon die sub a) und b) aufgezählten

$$2n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)(n-1) = 2n(n-1)(2n-3)$$

Verzweigungspunkte abziehen so bleiben noch weitere $2n(n-1)^2(n-2)$ Verzweigungspunkte welche paarweise die Doppeltangenten von $\delta^{n(n-1)}$

DSI

liefern, was mit obiger Zahl übereinstimmt.

Der Leser wird gewiss leicht erkennen dass auf eine andere als die in a) b) und c) aufgezählte Art ein Doppelpunkt zweiter Art nicht entstehen kann.

Da je zwei der Δ Doppeltangenten einem der Vierecke von denen wir sprachen als Diagonalen angehören so gibt es im Ganzen $\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2}$ solcher Vierecke:

„Es gibt $\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2}$ einfache Vierecke welche einem festen Kegelschnitte C_2 eingeschrieben, und einer festen allgemeinen Curve n-ter Classe δ^n umschrieben sind."

Ohne uns weiter mit diesen ~~[illegible]~~ allgemeinen Untersuchungen zu befassen, bemerken ~~wir nur~~ noch schliesslich dass aus der gefundenen Zahl der Doppeltangenten von $\delta^{n(n-1)}$ folgen würde, dass diese Curve in mehrere Curven zerfällt. Welches sind diese Curven?

36. Von besonderem Interesse sind die symmetrischen Elementensysteme zweiten

Grades. Weil für $n=2$ auch $n(n-1)=2$ ist so erkennen wir:

„Das aus einem symmetrischen Elementensystem ~~abgel~~ zweiten Grades abgeleitete sym. System ist ebenfalls vom zweiten Grade."

Hieraus folgt ferner sofort daß überhaupt alle aus einem sym. Systeme zweiten Grades abgeleiteten Systeme auch vom zweiten Grade sind.

Die Zahl der Elemente w ist für $n=2$ gleich Null; ~~die Zahl der~~ ebenso die Zahl der aus den Doppeltangenten von $\delta^{n(n-1)}$ fliessenden, denn es ist hier $\Delta=0$. Es bleiben für das abgeleitete System daher nur die vier Verzweigungselemente v welche auch Verzweigungselemente ~~von Δ sind~~ des ursprünglichen Systemes sind.

Hieraus folgen dann ferner, und zwar ~~nun~~ unmittelbar die bekannten Sätze von Poncelet über die ~~einem~~ Polygone welche einem Kegelschnitte C_2 eingeschrieben und zugleich einem zweiten Kegelschnitte umschrieben sind.

III Die Sätze von Poncelet über die gleichzeitig ein- und umschriebenen Polygone

37. Es seien C_2 und C_2' zwei beliebige Kegelschnitte in einer und derselben Ebene liegend. Durch einen beliebigen Punkt x_1 von C_2 ziehe man an C_2' eine Tangente welche C_2 in x_2 schneiden möge; von x_2 die weitere Tangente x_2x_3 an C_2' welche C_2 in x_3 treffen möge u.s.w. bis zum Punkte x_n. Man erhält so ein dem Kegelschnitte C_2 eingeschriebenes n-Eck $x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$ dessen $(n-1)$ Seiten x_1x_2, x_2x_3, … $x_{n-1}x_n$ den Kegelschnitt C_2' berühren. Da jedem Punkte x_1 zwei Punkte x_n x_n' entsprechen (man kann nämlich auch von der zweiten durch x_1 zu C_2' gehenden Tangente x_1x_2' das Tangentenziehen fortsetzen wodurch man ein zweites n-Eck und einen zweiten Punkt x_n' erhält) so bilden x_1 und x_n als einander entsprechende Punkte ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades auf C_2 und es wird somit die Gerade $\overline{x_1x_n}$ einen dritten Kegelschnitt δ^2 – nämlich den Directions Kegelschnitt des sym. Punktsystemes – umhüllen, welcher Kegelschnitt durch die vier Schnittpunkte v, v_1', v_1^2, v_1^3 von $C_2\,C_2'$ hindurchgeht. Denn in der That

sind diese vier Schnittpunkte die
Verzweigungspunkte des sym. Punktsystemes.
Wollte man z.B. zu v_1 die entsprechenden
Punkte finden so hat man durch
diesen Punkt von beiden durch ihn
gehenden Tangenten ausgehend
die aufeinander folgenden (n-1)
Tangenten an C_2' zu ziehen, aber
die Tangenten von v_1 an C_2' fallen
in eine zusammen welche $v_1 v_2$
sein möge; es werden also auch die
übrigen Tangenten der beiden Reihenfolgen
~~Systeme~~ zu je zwei zusammen-
fallen d.h. man hat durch v_2 die ~~von v_n~~
Tangente $v_2 v_3$, dann durch v_3 die
Tangente $v_3 v_4$ u.s.w. an C_2' zu
ziehen ~~um~~ bis man schließlich
zum Punkte v_n kommt welcher
zugleich auch v_n' vorstellt. Der
Punkt v_n ist also der dem Verzweigungs-
punkte v_1 entsprechende Doppelpunkt,
und der Directionskegelschnitt δ^2
wird demnach die Tangente von
C_2 in v_n ebenfalls zur Tangente
haben. Ebenso leitet man aus

DSI

$v_1^1\ v_1^2\ v_1^3$ die drei übrigen Doppelpunkte
$v_n^1\ v_n^2\ v_n^3$ ab und erhält dadurch auch die drei übrigen,
~~mit~~ den Kegelschnitten C_2 und δ^2 ge-
meinschaftlichen Tangenten.
Da auch die reciproken Betrachtungen
giltig sind so können wir die folgenden
Sätze aussprechen:

„I. Wenn ein variables ~~Polygon~~ (einfaches) Polygon
einem festen Kegelschnitte C_2 eingeschrieben
ist und wenn alle seine Seiten mit Ausnahme
einer einzigen einen zweiten festen
Kegelschnitt C_2' berühren, so berührt
die letzte Seite ebenfalls einen
festen Kegelschnitt δ^2 welcher
durch die vier Schnittpunkte von
$C_2 C_2'$ hindurchgeht."

II. „Wenn ein variables (einfaches) Polygon
einem festen Kegelschnitte C_2 umschrieben
ist, und wenn alle seine Ecken mit Ausnahme
einer einzigen einen zweiten festen Kegelschnitt
durchlaufen, so beschreibt die letzte Ecke
ebenfalls einen festen Kegelschnitt
δ^2 welcher die vier den Kegelschnitten
$C_2 C_2'$ gemeinschaftlichen Tangenten berührt."

Verbindet man irgend zwei Ecken des Polygones $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ z. B die Ecken a_r und a_{r+k} so hat das Polygon $a_r a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_{r+k}$ offenbar dieselben Eigenschaften wie das ursprüngliche $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$; es wird also auch die Diagonale $\overline{a_r a_{r+k}}$ einen Kegelschnitt D_k^2 welcher dem Büschel $(C_2 C_2')$ angehört umhüllen welcher auch als Enveloppe der Diagonalen $\overline{a_1 a_{1+k}}$, $\overline{a_2 a_{2+k}}$, $\overline{a_3 a_{3+k}}$ u.s.w erscheint denn diese Diagonalen sind nur ebensoviele besondere Lagen der Diagonale $\overline{a_r a_{r+k}}$. Nur hat man hiebei zu sorgen dass r nicht ~~grösser als~~ gleich n wird weil dann, der exceptionellen Stellung wegen der Seite $\overline{a_n a_1}$ andere Kegelschnitte mit in Spiel kommen könnten. Ohne uns auf die hier auftretenden Kegelschnitte näher einzulassen, gehen wir zu dem Falle über

in welchem die beiden Kegelschnitte $C_2 C_2'$ eine solche gegenseitige Lage besitzen dass für eines der dem Kegelschnitte C_2 eingeschriebenen Polygone auch die Seite $\overline{a_n a_1}$ eine Tangente von C_2' ist.

38. Wenn in dem Polygone $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ die letzte Seite $\overline{a_n a_1}$ ebenfalls eine Tangente von C_2' ist d.h. wenn es ein Polygon von n Seiten gibt welches dem C_2 eingeschrieben und gleichzeitig dem C_2' umschrieben ist so wird der Kegelschnitt D^2 mit dem Kegelschnitte C_2' identisch. Denn zu den vier, den Curven $D^2 C_2'$ gemeinschaftlichen Tangenten welche wir schon (auch der Lage nach) kennen gelernt haben, kommt nun noch die fünfte Tangente $\overline{a_n a_1}$ welche dann sofort das Zusammenfallen der Kegelschnitte $C_2' D^2$ zur Folge hat. Die sämmtlichen Lagen von $\overline{a_n a_1}$ werden also Tangenten von C_2' sein d.h. alle Polygone $a_1 a_2 \cdots a_n$ werden dem C_2 eingeschrieben

und zugleich dem C_2 umgeschrieben sein. Wir haben also den (von Poncelet herrührenden) Satz:

„Wenn ein Polygon von n Seiten einem Kegelschnitte eingeschrieben und zugleich einem zweiten Kegelschnitte umschrieben ist so gibt es unendlich viele solcher Polygone von n-Seiten welche dem ersten Kegelschnitte eingeschrieben und dem zweiten umschrieben sind"

Aus früherem folgt auch sofort daß alle Diagonalen ~~wie~~ von solchen Polygonen auch Kegelschnitte umhüllen. Und zwar umhüllen alle gleichartigen d.h. gleich weit von einander abstehende Ecken mit einander verbindenden Diagonalen immer denselben Kegelschnitt ein. Wenn n eine gerade Zahl ist so gibt es bekanntlich $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ solcher

DSI

Arten von Diagonalen. Es wird also auch $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ Kegelschnitte geben welche von allen Diagonalen (Artenweise) umhüllt werden. ~~Nimmt man zu~~ Nimmt man von diesen Kegelschnitten z.B. jenen D_K^2, welcher von den Diagonalen $\overline{a_r a_{r+K}}$ eingehüllt wird ($r = 1, 2, \dots$ $K = \text{const}$) so gehen durch einen beliebigen Punkt a_r von C_2 an D_K^2 zwei Tangenten nämlich $\overline{a_r a_{r+K}}$ und $\overline{a_r a_{r-K}}$. Wenn aber $K = \frac{n}{2}$ so ~~sind~~ a_{r+K} und a_{r-K} ein und derselbe Punkt, nämlich der, dem Punkte a_r im Polygone diametral gegenüberliegende Eckpunkt $a_{r+\frac{n}{2}}$; es werden also auch $\overline{a_r a_{r-K}}$, $\overline{a_r a_{r+K}}$ zusammenfallen nämlich in der Hauptdiagonale $\overline{a_r a_{r+\frac{n}{2}}}$. Der Kegelschnitt $D_{\frac{n}{2}}^2$ reduziert sich demnach auf einen

einzigen Punkt da die durch einen beliebigen Punkt x von C_2 an ihn gehenden Tangenten in eine einzige zusammen fallen.

„Wenn die Seitenzahl der dem C_2 eingeschriebenen und dem C_2' umschriebenen Polygone eine gerade Zahl n ist so gehen die Hauptdiagonalen (welche gegenüberliegende Ecken mit einander verbinden) durch einen festen Punkt, und die übrigen Diagonalen umhüllen $\left(\frac{n}{2}-2\right)$ Kegelschnitte welche sämtlich durch die Schnittpunkte von $C_2\,C_2'$ hindurchgehen."

„Wenn n eine ungerade Zahl ist so umhüllen die Diagonalen ein System von $\frac{n-3}{2}$ Kegelschnitten welche ~~sämtl.~~ sämtlich durch die Schnitte von $C_2\,C_2'$ hindurchgehen."

Denn für n = ungerade gibt es bekanntlich $\frac{n-3}{2}$ Gruppen gleichartiger Diagonalen in dem n-Ecke.

Es braucht nicht besonders bewiesen zu werden daß auch die reciprocken Sätze gelten:

„Wenn einem Kegelschnitte ein einfaches n-Seit umgeschrieben ist welches einem zweiten Kegelschnitte gleichzeitig eingeschrieben ist so gibt es ~~xxx~~ unendlich viele solcher n-Seite welche u.s.w.

Ist n eine gerade Zahl so schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten der n-Seite auf einer festen Geraden. Die übrigen gegenseitigen Schnittpunkte der Seiten erfüllen $\left(\frac{n}{2}-2\right)$ Kegelschnitte welche die den beiden Grundkegelschnitten gemeinsamen Tangenten berühren.

Wenn n ungerade ist so erfüllen diese Schnittpunkte ein System von

$\frac{-3}{2}$ Kegelschnitten, u. s. w.

39. Aus den Sätzen des § 37 folgt unmittelbar:

„Wenn ein n-Eck einem Kreise eingeschrieben ist und wenn alle ~~umsch~~ Seiten bis auf eine einzige einen zweiten festen Kreis berühren, ~~berührt~~ so umhüllt auch die letzte Seite einen Kreis und auch die Diagonalen gruppieren sich zu Kreise umhüllenden Systemen."

In dieser Form hat Poncelet ~~[illegible]~~ den Hauptsatz über ein- und umschriebene Polygone etwa aufgestellt.

Ebenso reciprock:

„Wenn ein (einfaches) n-Seit einem Kegelschnitte ~~eingesch~~ umgeschrieben ist und wenn alle seine Ecken bis auf eine einen zweiten zum ersteren confocalen Kegelschnitt beschreiben, so beschreibt auch die letzte Ecke einen dritten zu den beiden ersten confocalen Kegelschnitt. Die Schnitte der übrigen Seiten gruppieren sich ebenfalls zu confocale Kegelschnitte beschreibenden Systemenen."

DSI

IV Die Projectivität der singulären Elemente zweideutiger Gebilde.

40. Es seien X, Y zwei zweideutig aufeinander bezogene Gebilde, x, y die Parameter zweier einander entsprechenden Elemente welche demnach in der Verwandschaftsgleichung $F(x,y)=0$ jeder im zweiten Grade vorkommen müssen, so daß diese Gleichung, etwa nach y geordnet die Form haben wird

$$y^2 f_0 + y f_1 + f_2 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

wobei:

$$f_i = A_i x^2 + B_i x + C_i \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ist und $A_i B_i C_i$ constante Größen darstellen.

Im Ganzen kommen in beiden Systemen 16 singuläre Elemente vor nämlich: die vier Verzweigungselemente des Systemes X sie seien $x_1 x_2 x_3 x_4$; ihnen entsprechen die vier Doppelelemente $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$ in Y. Ebenso haben wir in Y vier Verzweigungselemente $y_1 y_2 y_3 y_4$ welchen in X die vier Doppelelemente $x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$ entsprechen werden.

41. Man kann das eine der beiden Systeme etwa X so auf das andere System Y projiciren daß die singulären Elemente

des einen Systemes mit den singulären Elementen des abgeleiteten zweiten Systemes zusammenfallen.

Wenn aus dem Systeme X nach dem Gesetze der Projectivität das System Y' entstehen soll so hat man

p. 33 / J. 3

$$x = \frac{\alpha y' + \beta}{\gamma y' + \delta} \quad \text{woraus: } y' = \frac{\beta - \delta x}{\gamma x - \alpha} \qquad (2)$$

zu setzen wobei $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ ganz willkürliche Constanten sind. [Wenn wir uns nun das System Y' als mit Y conlocal denken so können wir den beiden Parametern $y\,y'$ dieselbe Bedeutung unterlegen so daß für ein und dasselbe Element der conlocalen Systeme Y Y' auch $y'=y$ ist. Da Y mit X in zweideutiger und mit Y' in eindeutiger Beziehung ist so wird zwischen Y Y' eine zwei-zweideutige Beziehung stattfinden müssen, und erhalten wir die entsprechende Verwandtschaftsgleichung aus (1) durch Substitution des Wertes für x aus (2).

Für die Funktion f_i ergibt sich

$$f_i = \frac{A_i(\alpha y'+\beta)^2 + B_i(\alpha y'+\beta)(\gamma y'+\delta) + C_i(\gamma y'+\delta)^2}{(\gamma y'+\delta)^2}$$

oder wenn

$$\varphi_i = y'^2[A_i\alpha^2 + B_i\alpha\gamma + C_i\gamma^2] + y'[2A_i\alpha\beta + B_i(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2C_i\gamma\delta] + [A_i\beta^2 + B_i\beta\delta + C_i\delta^2]$$

DSI

gesetzt wird, so hat man

$$f_i = \frac{\varphi_i}{(\gamma y'+\delta)^2}$$

so daß nach Unterdrückung des factors $\frac{1}{(\gamma y'+\delta)^2}$ die Gleichung (1) in:

$$y^2\varphi_0 + y\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \qquad \ldots (3)$$

übergeht. Diese Gleichung stellt nun die zweideutige Beziehung zwischen den beiden Systemen Y Y' dar.

Von den vier Constanten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ können wir drei als willkürlich annehmen und daher auch für sie drei beliebige Bedingungen aufstellen; wir wollen letztere so wählen daß die Gleichung (3) symmetrisch wird in y und y', d.h. daß die Coefficienten von x^2y und xy^2, jene von x^2 und y^2 und schließlich die von x und y resp. einander gleich werden. Dies gibt, wie sofort zu sehen ist die folgenden drei Bedingungen für $\alpha\beta\gamma\delta$:

$$\left.\begin{aligned} 2A_0\alpha\beta + B_0(\alpha\delta+\beta\gamma) + C_0\gamma\delta &= A_1\alpha^2 + B_1\alpha\gamma + C_1\gamma^2 \\ 2A_2\alpha\beta + B_2(\alpha\delta+\beta\gamma) + C_2\gamma\delta &= A_1\beta^2 + B_1\beta\delta + C_1\delta^2 \\ A_2\alpha^2 + B_2\alpha\gamma + C_2\gamma^2 &= A_0\beta^2 + B_0\beta\delta + C_0\delta^2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hiedurch erhält die Gleichung (3) die Form:

(5) ... $ayy'^2 + byy'(y+y') + c(y^2+y'^2) + dyy' + e(y+y') + f = 0$

Da nun die Verwandtschaftsgleichung der beiden Systeme Y Y' in Bezug auf die beiden Parameter symetrisch ist so entspricht (die beiden Systeme als conlocal vorausgesetzt) irgend einem Elemente ob man es nun zu dem einen oder dem anderen Systeme rechnet dasselbe Elementenpaar. Man kann nun in der That die beiden Systeme weiter nicht von einander unterscheiden in der Art etwa wie zwei conlocale projectivische Systeme wenn dieselben eine Involution bilden. Die beiden durch Gleichung (5) dargestellten conlocalen Systeme bilden ein ~~[illegible]~~ symetrisches Elementen-System zweiten Grades.

Aus der Symmetrie der beiden Systeme folgt nun sofort dass die Verzweigungselemente $y_1 y_2 y_3 y_4$ von Y identisch sind mit den Verzweigungselementen $y_1' y_2' y_3' y_4'$ von Y' und ebenso die Doppelelemente $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$ von Y identisch mit den Doppelelementen $y_1'^{12} y_2'^{12} y_3'^{12} y_4'^{12}$ von Y'. Denn in der That entsprechen dem y_1 z.B. zwei zusammenfallende Elemente ~~[illegible]~~ $y_1'^{12}$ in Y' und wenn wir y_1 als ein Element von Y' also etwa als y_1' betrachten so müssen ihm auf Grund der Symmetrie dieselben zwei also mit $y_1'^{12}$ zusammenfallenden Elemente y_1^{12} entsprechen. ~~Das System~~ Die Gruppe $y_1 y_2 y_3 y_4 y_1^{12} \ldots$ ist ~~[illegible]~~ also congruent mit der ~~System~~ Gruppe $y_1' y_2' y_3' y_4' y_1'^{12} \ldots$ weil allgemein $y_i \equiv y_i'$ und $y_i^{12} \equiv y_i'^{12}$ ist. Da nun ~~[illegible]~~ das System X projectivisch ist mit Y' so ist klar dass ~~das System~~ die Elementengruppe $y_1 y_2 y_3 y_4 y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$ projectivisch sein muss mit der Elementengruppe $x_1 x_2 x_3 x_4 x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$ d.h. das Doppelverhältniss von vier Elementen der ersten Gruppe ist gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Elemente der zweiten Gruppe. Dieses (projectivische) Entsprechen wird durch die Gleichung (2) ausgedrückt und jedem System von aus (4) fliessenden Werten von $\alpha \beta \gamma \delta$ ~~[illegible]~~ entspricht

DSI

nach Gleichung (2) eine projectivische Beziehung zwischen den genannten Elementengruppen in X und Y'.
Die Gleichungen (4) stellen nun drei Oberflächen zweiten Grades dar welche sich, da keine durch die Schnittcurve der beiden anderen hindurchgeht in acht Punkten schneiden werden. Wir erhalten also acht Systeme von Werten für $\alpha \beta \gamma \delta$; diese acht Systeme müssen jedoch paarweise conjugirt sein so zwar daß je ein Paar ~~dieselbe~~ wesentlich dieselbe durch (2) ausgedrückte Projection liefert. ~~Denn wenn $x_1 x_2$ die beiden dem y nach (1) entsprechenden Werte sind und y' diesem Werte nach (2) entspricht so drückt (4) aus daß $y_1 y_2$ mit $y'_1 y'_2$ zusammenfallen was in doppelter aber wesentlich nicht verschiedener Weise bewerkstelligt werden kann indem man einmal y_1 mit y'_1 (und demgemäß y_2 mit y'_2) und das anderemal y_1 mit y'_2 (und demgemäß y_2 mit y'_1) zusammenfallen läßt~~

~~Irgend einem Elemente y' von Y' entspricht nach Gl. (2) ein Element y von Y und diesem Elemente entsprechen nach Gl. (1) zwei Elemente $x_1 x_2$ von X~~

DSI

Nachdem wir mittelst (2) das System X auf Y in Y' projicirt haben handelt es sich natürlich um folgendes.
Irgend ein Element der conlocalen Systeme $Y Y'$ kann man sowohl zu dem einen als auch zu dem anderen rechnen, und demgemäß dieses Element mit $y y'$ bezeichnen. Dem y' entspricht nach (2) das Element x in X und diesem nach (1) die beiden Elemente $y_1 y_2$ in Y. Demselben Elemente y' als Element y von Y betrachtet entsprechen zwei Elemente $x_1 x_2$ in X und diesen nach Gleichung (2) zwei Elemente $y'_1 y'_2$ in Y'. Wenn nun die Gleichungen (4) befriedigt ~~werden~~ sind so wird der Symmetrie wegen das Elementenpaar $y_1 y_2$ mit $y'_1 y'_2$ zusammenfallen was nun offenbar in zwei jedoch wesentlich nicht verschiedenen Arten geschehen kann. Es kann y_1 mit y'_1 (und dann y_2 mit y'_2) oder y_1 mit y'_2 (und dann y_2 mit y'_1) zusammenfallen. Jeder dieser von einander ~~nicht~~ dem Endzwecke nach nicht verschiedenen Projectionen entsprechen aber offenbar zwei verschiedene Systeme von Werten für $\alpha \beta \gamma \delta$. Die acht aus (4) fließenden Wertsysteme geben also nur vier von einander verschiedene Projectionen. Man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

„Wenn zwei Systeme X Y in zwei-zweideutiger Beziehung sind so kann man das eine in ~~vier verschiedenen~~ verschiedenen Arten auf das andere so linear projicieren daß die ~~Singulär~~ Doppelelemente des einen ~~auf~~ in den Doppelelementen des anderen und die Verzweigungselemente des einen in jenen des anderen projicirt erscheinen."

Hieraus folgt unmittelbar:

~~[illegible]~~

„Die Doppel- und die Verzweigungselemente zweier zweideutiger Systeme sind in vier verschiedenen Arten projectivisch auf einander bezogen.

D. h. wenn man unter den Verzweigungs- und Doppelelementen $x_1 x_2 x_3 x_4$ $x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$ beliebige vier herauswählt so entsprechen ihnen (projectivisch in vier verschiedenen Arten) vier von den analogen Elementen $y_1 y_2 y_3 y_4$ $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$.

Es herrscht also zwischen den beiden singulären Elementengruppen Doppelverhältnißgleichheit (in vier verschiedenen Arten).

~~„Über Involutionen n-ten Grades und K-ter Stufe"~~

~~[illegible]~~

~~Schon seit längerer Zeit bei der Behandlung der Singularitäten ebener und räumlicher 2) Raumcurven und nun auch von Fragen bei der Abbildungstheorie der rationalen Curven auf Kegelschnitte 3) bin ich auf bemerkenswerte ... gewiesen an die Involutionen wie sie bisher in die Geometrie eingeführt worden ... Verwandtschaftsarten geleitet worden, welche sich zeigen und auch in der Theorie der Curven- und Flächennetze (oder allgemeiner der Curven- und Flächensysteme) eine hervorragende Rolle zu spielen berufen sein dürften. Ich glaube solche Verwandtschaften am treffendsten als Involutionen höherer Stufen bezeichnen zu sollen da die gewöhnlichen Involutionen beliebigen Grades ... Involutionen erster Stufe darstellen.~~

~~[illegible]~~ I. Involutionen n-ter Ordnung K-ter Stufe.

42. Sind die Elemente eines unicursalen (rationalen) Trägers in einer solchen Wechselbeziehung daß durch Annahme von K Elementen weitere (n−K) Elemente (n>K) so bestimmt erscheinen, daß in dem Bereiche der sämmtlichen n Elemente (der angenommenen und der durch sie bestimmten) vollkommene Vertauschungsfähigkeit herrscht, so zwar daß man unter den Elementen der n gliedrigen Gruppe beliebige K herauswählen und als bestimmende betrachten kann und hierbei immer die übrigen n−K als bestimmte erhält, so soll diese Art von Verwandtschaft eine Involution n-ten Grades und K-ter Stufe genannt und

und mit J_n^K bezeichnet werden."

Wird K=1 so haben wir ein System von n-elementigen Gruppen von denen jede durch Annahme eines ihrer Elemente bestimmt erscheint

„Eine Involution n-ten Grades wie sie bisher in die geometrischen Betrachtungen eingeführt worden ist ist somit als eine Involution n-ten Grades erster Stufe zu betrachten."

Solche Involutionen erster Stufe werden auf rationalen ebenen Curven bestimmt durch Curvenbüschel und auf rationalen Raumcurven durch Flächenbüschel.

Ist in der Ebene einer rationalen ebenen Curve ein Curvennetz gegeben so bilden die Schnittpunkte der einzelnen Curven des Netzes mit der gegebenen rationalen Fundamentalcurve auf der letzteren eine Involution zweiter Stufe da die Gesamtgruppe solcher Schnittpunkte durch Annahme zweier von ihnen vollkommen bestimmt ist, indem durch zwei Punkte nur eine Curve eines Netzes hindurchgelegt werden kann.

Auf einer rationalen Raumcurve bestimmen aus demselben Grunde die Flächen eines Flächennetzes eine Involution zweiter Stufe.

~~1) „Über Singularitäten der zweiten Ordnung bei rationalen ebenen Curven" Sitzgsb. der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1872. Seite 59.~~

~~2) Sopra alcune singolarità di second'ordine delle curve gobbe razionali. Ann. d. Mat. (Milano, 1870-71. Serie II. Tomo IV. p. 328~~

~~3) Über Abbildungen rationaler Raumcurven vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt; in den Sitzgsb. d. k. Akad. 1875-1879.~~

Behält man die rationale (ebene oder räumliche) Curve als Fundamentalcurve bei, geht aber über zu einem Curven- resp. Flächensystem von dreifacher Unendlichkeit so bestimmt dasselbe auf der Grundcurve eine Involution dritter Stufe, und allgemein erhält man eine Involution K-ter Stufe wenn man zu einem linearen Curven- oder Flächensystem von K-facher Unendlichkeit greift.

~~[illegible]~~

Aus der Definition einer J_n^K folgt unmittelbar:

43. „Hält man in einer Involution J_n^K n-ten Grades und K-ter Stufe p (<K) Elemente $e_1 e_2 \dots e_p$ fest so bilden die (n-p)elementigen Gruppen $e_{p+1} \dots e_n$ welche mit den festgehaltenen Elementen Gruppen von J_n^K bilden eine Involution (n-p)-ten Grades und (K-p)-ten Stufe; kürzer: hält man in J_n^K p (<K) Elemente fest so bilden die variablen Elemente eine J_{n-p}^{K-p}."

„Diese Involution J_{n-p}^{K-p} soll als der p-elementigen Gruppe $e_1 e_2 \dots e_p$ adjungirt bezeichnet werden."

Macht man p = K-1 so wird J_{n-p}^{K-p} in J_{n-K+1}^1 übergehen d.h.:

„Jeder Gruppe von (K-1) Elementen ist eine Involution erster Stufe (eine Involution im gewöhnlichen Sinne des Wortes) vom Grade (n-K+1) adjungirt."

~~[illegible]~~

44. Von den k Elementen die man zur Bestimmung einer Gruppe wählen kann, kann man beliebig viele zusammenfallen lassen. Durch das Zusammenfallen von k' dieser Elemente entsteht ein k'-faches Element, wobei offenbar $k' \leqq k$ sein wird.

„Jedes Element einer J_n^k kann als k'-faches Element betrachtet werden ($k' \leqq k$) und können zu ihm noch beliebig viele $k-k'$ Elemente als mit ihm eine Gruppe bestimmend hinzugefügt werden."

Für $k'=k$ hat man:

„Jedes Element einer J_n^k tritt in einer durch ihn vollkommen bestimmten Gruppe als k-faches Element auf."

Nimmt man ein Element e als k-faches an so ist dadurch die Gruppe bestimmt und werden in derselben noch weitere $n-k$ einfache Elemente auftreten. Geschieht es nun, und das wird offenbar in einer beschränkten Anzahl von Fällen eintreten, dass ~~[illegible]~~ von den $(n-k)$ mit e eine Gruppe bildenden Elementen eines mit e zusammenfällt so wird e zu einem $(k+1)$-fachen Elemente.

„Eine Involution k-ter Stufe hat eine bestimmte Anzahl von $(k+1)$-fachen Elementen".

Die Zahl dieser Elemente ergibt sich durch folgende Betrachtungen.

DSI

Die einer beliebigen Gruppe von $(k-1)$ Elementen adjungirte Involution ist von der ersten Stufe hat also da ihr Grad $(n-k+1)$ ist $2(n-k)$ Doppelelemente d.h.

„Beliebige $(k-1)$ Elemente kommen in $2(n-k)$ Gruppen mit je einem Doppelelemente vor."

Überdies ist klar dass von den $(k-1)$ Elementen jedes als ein Doppelelement betrachtet werden kann.

Hält man $k-2$ Elemente $e_1 \dots e_{k-2}$ fest und fügt ein variables Element e_{k-1} hinzu so wird die ganze Gruppe von $(k-1)$ Elementen nach dem letzten Satze in $2(n-k)$ Gruppen mit je einem Doppelelemente d vorkommen; es entsprechen also jedem e_{k-1} $2(n-k)$ Elemente d und umgekehrt ist klar dass wenn man zu den $(k-2)$ Elementen $e_1 \dots e_{k-2}$ ein Doppelelement d hinzufügt die Gruppe vollkommen bestimmt sein wird und jedes der übrigen $(n-k)$ Elemente dieser Gruppe kann als ein e_{k-1} betrachtet werden. Es entspricht also jedem d ein System von $(n-k)$ Elementen e_{k-1} so dass es nach bekannten Principien $2(n-k)+(n-k)$ d.h. $3(n-k)$-mal geschehen wird dass ein e_{k-1} mit einem d zusammenfällt wodurch allemal ein dreifaches Element entsteht.

„Beliebige $(k-2)$ Elemente kommen in $3(n-k)$ Gruppen mit je einem dreifachen Elemente vor."

Überdies kann jedes der $(k-2)$ Elemente als dreifaches angenommen werden.

Hält man $K-3$ Elemente $e_1 \ldots e_{K-3}$ fest so liefert ein variables hinzugefügtes Element e_{K-2} nach früherem $3(n-K)$ dreifache Elemente d und umgekehrt werden mit einem d $(n-K)$ Elemente e_{K-2} in einer Gruppe vorkommen; es wird also $3(n-K)+(n-K)$ d.h. $4(n-K)$-mal geschehen daß ein e_{K-2} mit einem d zusammenfällt wodurch ein vierfaches Element entsteht:

„Beliebige $(K-3)$ Elemente kommen in $4(n-K)$ Gruppen mit je einem vierfachen Elemente vor."

Durch analoge Betrachtungen gelangt man zu dem allgemeinen Satze:

„Beliebige $(K-l)$ Elemente kommen in $(l+1)(n-K)$ Gruppen mit je einem $(l+1)$-fachen Elemente vor."

Für $l=K-1$ erhält man da $K-l=1$ ist:

„Jedes Element e kommt in $K(n-K)$ Gruppen mit je einem K fachen Elemente d vor"

Nun bestimmt ein K-faches Element eine Gruppe in welcher dann weitere $n-K$ einfache Elemente e vorkommen; es entspricht somit jedem e ein System von $K(n-K)$ Elementen d, und jedem d ein System von $(n-K)$ Elementen e. Es wird also $K(n-K)+(n-K)$ d.h. $(K+1)(n-K)$-mal geschehen daß ein

DSI

e mit dem entsprechenden d zusammenfällt wodurch ein $(K+1)$-faches Element entsteht; dies gibt den Satz:

„Die Zahl der $(K+1)$-fachen Elemente einer Involution n-ten Grades und K-ter Stufe ist $(K+1)(n-K)$."

Hieraus folgt daß nur Involutionen spezieller Natur $(K+2)$-fache, $(K+3)$-fache .... oder n-fache Elemente aufweisen werden wenn sie n-ten Grades und K-ter Stufe sind.

45.) ~~VII [illegible]~~

Ist die Involution vom n-ten Grade so besteht jede Gruppe aus n Elementen und kann durch eine Gleichung $f=0$ des n-ten Grades dargestellt werden wenn man die n-Wurzeln dieser Gleichung ~~den~~ gleich macht den Parameterwerten welche den n-Elementen der Gruppe zukommen.

Eine Involution n-ten Grades k-ter Stufe ist dadurch charakterisiert dass man k Elemente einer Gruppe beliebig wählen kann, dann aber die Gruppe vollkommen und eindeutig (linear) bestimmt erscheint. Es werden also in der eine beliebige Gruppe darstellenden Gleichung k willkürliche Linearconstanten vorkommen müssen, d.h. die Gleichung welche irgend eine Gruppe darstellt, muss die Form haben:

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots \lambda_k f_k = 0$$

wenn $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ die variablen linearen Coefficienten und die $f_0\ f_1\ f_2 \dots f_k$ selbstverständlich Polynome des n-ten Grades darstellen. Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar der Satz:

"Eine Involution k-ter Stufe ist bestimmt wenn man von ihr $(k+1)$ beliebige, von einander ganz unabhängige Gruppen kennt."

Für $k=1$ hat man den bekannten Satz dass eine gewöhnliche Involution n-ten Grades durch zwei Gruppen bestimmt ist.

DSI

~~Die in einer Involution k-ten Stufe enthaltenen Involutionen niedrigeren Stufen~~

16. „Die sämmtlichen Gruppen einer Involution n-ten Grades und h-ter Stufe welche durch (h+1) beliebige Gruppen einer Involution desselben Grades und K-ter Stufe (K > h) bestimmt erscheint gehören auch der Involution K-ter Stufe an."

In der That, seien $f_0=0$ $f_1=0$ .... $f_h=0$ beliebige (h+1) Gruppen der Involution J_n^K so ist die durch sie bestimmte J_n^h dargestellt durch $f_0+\mu_1 f_1+\mu_2 f_2+\cdots\mu_h f_h=0$ und ist offenbar enthalten in der durch $f_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\lambda_h f_h+\lambda_{h+1} f_{h+1}+\cdots\lambda_K f_K=0$ dargestellten Involution K-ter Stufe u. z. für die speziellen Werte $\lambda_{h+1}=0$ .... $\lambda_K=0$ $\lambda_i=\mu_i$.

Wenn man also insbesondere zwei beliebige Gruppen der J_n^K herauswählt so sind alle Gruppen der durch dieselben bestimmten (gewöhnlichen) Involution n-ten Grades (erster Stufe) zugleich Gruppen der Involution J_n^K.

„Es enthält daher eine Involution n-ten Grades K-ter Stufe unendlich viele Involutionen desselben Grades und aller niedrigeren Stufen".

Wählt man unter den Gruppen einer J_n^K beliebige (h+1) [für h < K] so bestimmen sie eine J_n^h welche als der (h+1) gewählten Gruppen adjungirt bezeichnet werden soll.

Aus dem ~~eben~~ in diesem Abschnitte Gesagten folgt auch unmittelbar der Satz

„Eine Involution K-ter Stufe ist nur dann durch (K+1) Gruppen bestimmt wenn dieselben keiner Involution von niederer Stufe angehören".

So dürfen z. B. drei eine Involution zweiter Stufe bestimmende

DSI

Gruppen keiner (gewöhnlichen) Involution (erster Stufe) angehören.

47. „Wenn k Elemente einer Involution k-ter Stufe (welche im allgemeinen eine einzige Gruppe bestimmen) zwei Gruppen angehören so sind sie in unendlich vielen Gruppen enthalten von denen jede erst dann bestimmt erscheint wenn man zu den k Elementen noch ein weiteres hinzufügt. Von solchen k Elementen die in unendlich vielen Gruppen vorkommen wollen wir sagen daß sie eine neutrale Gruppe der Involution bilden.“

Es sei die Involution dargestellt durch die Gleichung 12) und f_1 und f_2 seien die beiden Gruppen in denen die durch die Gleichung $\varphi = 0$ dargestellten k Elemente enthalten sind so bleibt nur zu zeigen übrig daß wenn f_1 und f_2 durch φ theilbar sind, sich die Werte der $k-2$ Constanten $\lambda_3 \lambda_4 \ldots \lambda_k$ auf einfach unzählige Arten so finden lassen daß auch $f_0 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \ldots \lambda_k f_k$ durch φ theilbar wird. Das Resultat der Division von φ in $f_0 + \lambda_3 f_3 + \ldots \lambda_k f_k$ wird eine ganze rationale Funktion vom Grade $n-k$ sein und der Rest wird die Form $\frac{\psi}{\varphi}$ haben wo ψ eine Funktion des $(k-1)$-ten Grades ist deren $(k-1)$ unabhängige Coefficienten die $(k-2)$ zu bestimmenden Werte λ implicite enthalten. Läßt man diese Coefficienten verschwinden so hat man $(k-1)$ Gleichungen zur Bestimmung von $(k-2)$ Unbekannten. Man wird also von den letzteren noch eine einer beliebigen weiteren Bedingung unterwerfen können wodurch der obige Satz bewiesen ist. #

NV

ad # in Halbbogen 4

Aus der Definition der Involutionen folgt sofort:

„Hält man eine neutrale Gruppe einer J_n^k fest so bilden die sie vervollständigenden $(n-k)$-elementigen Gruppen eine J'_{n-k}.“

Es kann unter Umständen geschehen daß eine J_n^k auch neutrale Gruppen von $(k+r)$ Elementen enthält $(k+r < n)$ doch ist in einem solchen Falle die Involution von besonderer Natur und hat der angedeutete Umstand eine Herabminderung der $(k+1)$-fachen Elemente zur Folge.

ad ⊙ in Halbbogen 4.

Aus der vorstehenden Betrachtung folgt:

„Die sämmtlichen Involutionen erster Stufe n-ten Grades die man im Sinne des § IX in einer Involution zweiter Stufe n-ten Grades bilden kann besitzen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gemeinschaftliche Elementenpaare welche die neutralen Elementenpaare der Involution zweiter Stufe repräsentiren.“

~~III~~ „Eine Involution zweiter Stufe und n-ten Grades besitzt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ neutrale ~~Punkt~~ Elementenpaare."

Wir haben um für $K=2$ die neutralen Gruppen d. i. die neutralen Paare zu erhalten nur solche ~~Punkt~~ Elementenpaare zu suchen welche mit zwei beliebig gewählten Elementen in Gruppen sich befinden. Die beliebig gewählten Elemente seien a, b; jedem ist nach Satz No: 3 eine Involution $(n-1)$ Grades erster Stufe adjungirt und diese beiden Involutionen haben $(n-2)(n-2)$ gemeinschaftliche Elementenpaare, unter diesen sind aber auch die außer a, b in der durch diese beiden Elemente bestimmten Gruppe unserer J_n^2 enthaltenen $n-2$ Elemente welche man in $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Paare zusammenstellen kann die ~~nicht~~ offenbar nicht als neutrale zu gelten haben so daß also $(n-2)(n-2) - \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ d. i. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ neutrale Paare zurückbleiben wie oben behauptet wurde. ⊙

„Besitzt eine Involution zweiter Stufe und n-ten Grades eine neutrale r-elementige Gruppe so vertritt dieselbe $\frac{r(r-1)}{2}$ neutralen Paare."

Wenn die Elemente eines neutralen Paares zusammenfallen so entsteht ein neutrales Doppelelement.

Fallen von den Elementen einer neutralen Gruppe s zusammen so entsteht ein s-faches neutrales Element.

~~III~~ „Die neutralen Gruppen einer Involution dritter Stufe und n-ten Grades bestehen aus je drei Elementen ($K=3$) können also neutrale Tripel genannt werden. Jedes Element der Involution kommt in $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ neutralen Tripeln vor."

~~III „Über Involutionen höherer Grade" Crelle's Journal Bd. 72.~~

Denn hält man ein Element a der J_n^3 fest, so entsteht eine J_{n-1}^2 welche nach Satz Nro. 18 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ neutrale Paare besitzt von denen jedes offenbar mit a ein neutrales Tripel bildet.

„Je zwei Elemente einer Involution vierter Stufe und n-ten Grades ~~kommt~~ kommen in $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ neutralen Quadrupeln vor."

Denn hält man die Elemente a, b der J_n^4 fest so entsteht eine J_{n-2}^2 welche nach Satz Nro. 18 $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ neutrale ~~Punkt~~ Elementenpaare welche mit a b offenbar neutrale Quadrupel bilden, allgemein: hält man in einer J_n^K beliebige K-2 Elemente fest so ergibt sich eine J_{n-K+2}^2 welche nach Satz Nro: 18 $\frac{(n-K)(n-K+1)}{2}$ neutrale Elementenpaare besitzt, welche zu den (K-2) angenommenen Elementen hinzugefügt neutrale Gruppen der J_n^K bilden, also:

„Je (K-2) beliebige Elemente einer Involution n-ten Grades und K-ten Stufe kommen in $\frac{(n-K)(n-K+1)}{2}$ neutralen Gruppen vor."

Macht man n = 4 und K = 3 so ergibt sich aus dem letzten Satze dass jedes Element einer Involution vierten Grades und dritter Stufe nur in einer neutralen Gruppe vorkommt welche ~~die~~ durch das Element vollkommen bestimmt erscheint, d. h. also:

„Die neutralen Tripel einer Involution vierten Grades und dritter Stufe bilden eine (gewöhnliche) cubische Involution (erster Stufe)"

Allgemeiner folgt aus 21 für K = n-1:

23. „Die neutralen Gruppen einer Involution n-ten Grades und (n-1)-ten Stufe bilden eine Involution (n-1)-ten Grades und (n-3)-ten Stufe."

DSI

~~... Doppelelementen~~

48) Da man zur Bestimmung einer Gruppe einer J_n^K beliebige K Elemente wählen kann, „so kann man offenbar nach jenen in bestimmter Anzahl vorhandenen Gruppen einer Involution K-ter Stufe fragen welche K gegebenen Bedingungen genügen."

Man kann also insbesondere auch nach jenen Gruppen fragen welche K Doppelelemente enthalten.

Jedes Element x einer J_n^2 kommt (siehe Satz Nro: 7.) in 2(n-2) Gruppen vor in denen je ein Doppelelement enthalten ist; da außer diesem Doppelelemente in der Gruppe (n-2) Elemente vorkommen so entspricht jedem x ein System von (n-3) Elementen x' welche mit ihm in derselben mit einem Doppelelemente versehenen Gruppe vorkommen und da x in 2(n-2) solchen Gruppen vorkommt so entspricht jedem x ein System von 2(n-2)(n-3) Elementen x' und auch umgekehrt.

„Betrachtet man zwei Elemente welche mit einem Doppelelemente einer J_n^2 in derselben Gruppe vorkommen als einander entsprechend so sind jedem Element 2(n-2)(n-3) entsprechend zugeordnet. Die so einander entsprechenden Elemente bilden ein symmetrisches Elementensystem[1] vom Grade 2(n-2)(n-3)."

~~1) Siehe „Principes d'une théorie des systèmes symétriques d'éléments" Mém. d. l. soc. des sciences phys. et nat. Bordeaux 1874.~~

Dieses System hat also $4(n-2)(n-3)$ Doppelelemente erster Art (l.c.) von denen je zwei auf eine Gruppe der J_n^2 entfallen

„Es gibt somit $2(n-2)(n-3)$ Gruppen einer Involution n-ten Grades und zweiter Stufe von denen jede zwei Doppelelemente enthält."

Fragen wir nun in wie viel mit zwei Doppelelementen versehenen Gruppen ein beliebiges Element x einer J_n^3 vorkommt, wenn wir x festhalten so entsteht eine J_{n-1}^2 welche nach Satz No. 25 $2(n-3)(n-4)$ Gruppen mit Doppelelementenpaaren enthält, jede dieser Gruppen mit x zusammen gefasst stellt eine Gruppe der J_n^3 vor. Außer x kommen in einer solchen Gruppe $(n-5)$ einfache Elemente x' vor so daß einem x im Ganzen $2(n-3)(n-4)(n-5)$ Elemente x' entsprechen. Die Elemente $x\,x'$ bilden wiederum ein symmetrisches Elementensystem vom Grade $2(n-3)(n-4)(n-5)$ welches $4(n-3)(n-4)(n-5)$ Doppelelemente erster Art (in denen ein x mit einem entsprechenden x' zusammenfällt). Da von diesen Doppelelementen je drei auf eine Gruppe der J_n^3 entfallen so haben wir den Satz:

„In einer Involution n-ten Grades und dritter Stufe gibt es $\frac{4(n-3)(n-4)(n-5)}{3}$ Gruppen von denen jede drei Doppelelemente enthält."

Es ist klar wie man weiter zu gehen hat, man erhält in einer J_n^4 $\frac{2(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{3}$ oder $\frac{2^4}{1234}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ Gruppen

von denen jede vier Doppelelemente enthält. Allgemein:

„In einer Involution n-ten Grades und K-ter Stufe gibt es

$$\frac{2^K \cdot (n-K)(n-K-1)(n-K-2)\cdots\cdots(n-2K+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots K}$$

Gruppen von denen jede K Doppelelemente besitzt."

VI. Erzeugnisse mehrdeutiger Grundgebilde erster Stufe.

~~[illegible]~~

49.) Wenn in der Ebene zwei m-n-deutige Strahlenbüschel S_m S_n gegeben sind und man den Ort der Schnittpunkte einander entsprechender Strahlen als das Erzeugniss der beiden Büschel bezeichnet so hat man sofort den Satz:

„Zwei m-n-deutige Strahlenbüschel (in einer Ebene) erzeugen eine Curve (m+n)-ter Ordnung welche den Scheitel S_m des m-deutigen zu einem m-fachen und den Scheitel S_n des n-deutigen Büschels zu einem n-fachen Punkte hat."

Denn die beiden Büschel bestimmen auf irgend einer Transversale T zwei m-n-deutige Punktreihen deren (m+n) gemeinsame Punkte offenbar die Schnittpunkte von T mit der erzeugten Curve sind. Der Verbindungslinie $S_m S_n$ der beiden Scheitel entsprechen im Büschel S_m m Strahlen welche alle den gemeinsamen Strahl in m dem Punkte S_m unendlich nahen Punkten treffen, daher ist S_m ein m-facher Punkt der Curve und die dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden Büschel entsprechenden Strahlen in S_m sind die Tangenten ~~die~~ der Curve in diesem Punkte. Ebenso ist S_n ein n-facher Punkt und die dem Strahle $S_m S_n$ ~~entspr~~ in S_n entsprechenden n Strahlen sind die Tangenten der Curve in S_n.

Ebenso hat man die Sätze:

„Wenn man die einander entsprechenden Punkte zweier in einer Ebene liegenden m-n-deutigen Punktreihen mit einander verbindet so umhüllen die Verbindungslinien eine Curve (m+n)-ter Classe welche die Axen der beiden Punktreihen resp. zur m-fachen und n-fachen Tangente berührt. Die Berührungspunkte dieser Tangenten entsprechen den den beiden Reihen gemeinschaftlichen Punkte."

„Zwei m-n-deutige Ebenenbüschel deren Axen sich nicht schneiden erzeugen eine Regelfläche (m+n)-ter Ordnung mit einer m-fachen und einer n-fachen Leitgeraden."

Schneiden sich die Axen der Ebenenbüschel so geht die Regelfläche in eine Kegelfläche (m+n)-ter Ordnung mit einer m-fachen und einer n-fachen Kante über.

„Zwei m-n-deutige windschiefe Punktreihen erzeugen wenn man die entsprechenden Punkte mit einander verbindet eine Regelfläche (m+n)-ter Ordnung mit einer m-fachen und einer n-fachen Leitgeraden."

Wenn sich die Axen der Punktreihen schneiden so geht die Regelfläche in eine Curve (m+n)-ter Classe mit einer m-fachen und einer n-fachen Tangente über.

Jede der m Tangenten des m-fachen Punktes S_m gilt für zwei durch diesen Punkt gehende Tangenten der durch die beiden m-n-deutigen Büschel $S_m S_n$ erzeugten Curve; außerdem enthält der m-deutige Büschel 2m(n-1) Verzweigungsstrahlen von denen jeder von zwei zusammenfallenden Strahlen des n-deutigen Büschels geschnitten wird d.h. von denen jeder auch eine von S_m aus an die Curve gelegte Tangente darstellt. Die Gesammtzahl der von S_m an die Curve gehenden Tangenten ist also

$$2m + 2m(n-1) = 2mn.$$

„Die durch zwei m-n-deutige Büschel erzeugte Curve ist von der 2mn-ten Classe." Ebenso:

„Die durch zwei m-n-deutige Punktreihen erzeugte Curve ist von der 2mn-ten Ordnung."

„Die durch zwei m-n-deutige Ebenenbüschel oder Punktreihen erzeugte Regelfläche ist von der (m+n)-ten Classe; weil überhaupt die Ordnung einer Regelfläche zugleich ihre Classe ist.

Wird eine solche Regelfläche durch m-n-deutige Ebenenbüschel oder Punktreihen erzeugt so haben die Verzweigungs- und Doppelelemente der erzeugenden Gebilde die folgende Bedeutung.

Während in jeder Ebene des m- (oder n-) deutigen Büschels n (resp m) von einander verschiedene Erzeugende der Fläche liegen, enthält jede Verzweigungsebene weil ihr eine Doppelebene entspricht zwei zusammenfallende Erzeugende welche eine sogenannte singuläre Erzeugende der Fläche darstellen; die genannte Verzweigungsebene berührt nun offenbar die Fläche längs der singulären Erzeugenden. Der Punkt in welchem die singuläre Erzeugende die Axe des n- (resp m-) deutigen Büschels schneidet (welche Axe zugleich Träger der m- resp n-deutigen Punktreihe ist) ist ein Verzweigungspunkt der m- (resp n-) deutigen die Fläche erzeugenden Punktreihe. Die Verzweigungsebenen der beiden Büschel werden die Cuspidalebenen und die Verzweigungspunkte der beiden erzeugenden Reihen die Cuspidalpunkte der Fläche genannt. Es ist klar dass diesen Cuspidal- oder Verzweigungselementen die Doppelelemente des zweideutigen zweiten Gebildes zugeordnet sind. Aus dem allgemeinen Satze folgt:

DSI

„Die durch zwei m-n-deutige Ebenenbüschel oder Punktreihen erzeugte Regelfläche (m+n)-ter Ordnung und Classe besitzt 2m(n−1) + 2n(m−1) Cuspidalpunkte und ebensoviele durch dieselben hindurchgehende Cuspidalebenen." In jeder Cuspidalebene liegt eine singuläre Erzeugende der Fläche welche auch den in der Cuspidalebene liegenden Cuspidalpunkt enthält und längs deren die Cuspidalebene die Regelfläche berührt."

Jeder ebene Schnitt der Regelfläche ist eine Curve (m+n)-ter Ordnung welche auf der m-fachen Geraden einen n-fachen und auf der n-fachen Geraden einen m-fachen Punkt besitzt. Denn diese Schnittcurve tritt auf als das Erzeugniss der beiden m-n-deutigen Strahlenbüschel welche durch die beiden Ebenenbüschel in der schneidenden Ebene bestimmt werden. Wird die schneidende Ebene durch eine Erzeugende hindurchgelegt so bildet diese auch einen Bestandtheil des Gesammtschnittes und zwar einen Bestandtheil ersten Grades, es bleibt somit noch eine Curve (m+n−1)-ter Ordnung mit einem (m−1)-fachen Punkte und einem (n−1)-fachen Punkte

auf der m-fachen resp. der n-fachen Geraden der Fläche. Der Schnittpunkt der Erzeugenden mit dieser Curve $(m+n-1)$-ter Ordnung welcher außer ~~den $(m-1)$~~ den beiden erwähnten mehrfachen Punkte vorkommt ist der Berührungspunkt der schneidenden Ebene mit der Regelfläche.

„Der der Fläche aus einem beliebigen Punkte umschriebene Kegel ist von der $(m+n)$-ten Classe und besitzt eine m-fache und eine n-fache Tangentialebene welche durch die m-fache resp. n-fache Gerade hindurchgehen." In der That ergiebt sich dieser Kegel ~~aus~~ als Enveloppe aller durch seinen Scheitel und die einzelnen Erzeugenden der Fläche gelegten Ebenen und er kann daher als das Erzeugniß der beiden m-n-deutigen concentrischen (jedoch in verschiedenen Ebenen liegenden) Strahlenbüschel betrachtet werden welche man erhält wenn man die beiden die Fläche erzeugenden Punktreihen aus dem Kegelscheitel projicirt.

Eine einfache Betrachtung lehrt daß jeder Ebene Schnitt der Regelfläche die Cuspidalebenen berührt und daß jeder der Regelfläche umschriebene Kegel durch die Cuspidalpunkte hindurchgeht. Allgemeiner, berührt jede auf der Fläche gezogene Curve in den Punkten in denen sie den singulären Erzeugenden begegnet die zugehörigen Cuspidalebenen, und für jede der Fläche umschriebene Developpable gilt der reciproke Satz.

50 Von besonderer Wichtigkeit ist die reduzirte Lage der mehrdeutigen Gebilde, eine der perspectivischen Lage ~~entsprechende B~~ projectivischer Gebilde entsprechende Lagenbeziehung.

„Wenn zwei m-n-deutige in derselben Ebene liegende Strahlenbüschel so beschaffen sind daß der ihnen gemeinschaftliche Strahl sich r-mal selbst entspricht so sagen wir daß sich die beiden Büschel in reduzirter Lage r-ter Ordnung befinden."

„Zwei Punktreihen sind in reduzirter Lage r-ter Ordnung wenn der beiden gemeinschaftliche Punkt sich r-mal selbst entspricht." u.s.w.

Zwei perspectivische Strahlenbüschel oder Punktreihen

sind also ~~[illegible]~~ eindeutige (projectivische) Gebilde
in reduzirter Lage erster Ordnung.
Zwei m-n-deutige (gleichartige) Gebilde kann man
offenbar immer in reduzirte Lage erster Ordnung
überführen da es immer möglich ist sie in eine solche
Lage zu bringen dass sich das gemeinschaftliche Element
selbst entspricht, man braucht nur irgend zwei
entsprechende Elemente zum Zusammenfallen zu bringen.
Sollen jedoch zwei Gebilde in reduzirte Lage r-ter
Ordnung gebracht werden können so müssen in
ihnen zwei Elemente existiren so dass je einem
von beiden das andere r-mal entspricht. Zwei solche
Gebilde nennen wir <u>reduktionsfähig</u> von der r-ten
Ordnung, und das singuläre erwähnte Elementen-
paar nennen wir ein <u>Reduktionselementen-
paar r-ter Ordnung</u>.

51. Die Erzeugnisse reduktionsfähiger oder reduzirter
Gebilde sind spezieller Natur.
Zwei ~~[illegible]~~ von der r-ten Ordnung reduktionsfähige
m-n-deutige Strahlenbüschel erzeugen eine Curve

$(m+n)$-ter Ordnung mit einem m-fachen, einem n-fachen
und einem r-fachen Punkte. Die beiden ersten sind
die Büschelscheitel der letztere ist der Schnittpunkt
des Reduktionsstrahlenpaares.
Es seien in der That $X X'$ die beiden Reduktionsstrahlen
von denen also jeder r-mal dem anderen entspricht,
legt man durch ihren Schnittpunkt x eine Transversale
T so bestimmen beide Büschel auf T zwei m-n-deutige
Punktreihen in denen x r-mal sich selbst entspricht
also r von den $(m+n)$ gemeinsamen Punkten der
beiden Reihen vertritt. Ausser x werden also
auf T noch $(m+n-r)$ ~~[illegible]~~ Punkte des Erzeugnisses
beider Büschel auftreten es ist also x ein r-facher
Punkt der erzeugten Curve.
Ebenso erzeugen zwei m-n-deutige von der r-ten
Ordnung reduktionsfähige Punktreihen eine Curve
$(m+n)$-ter Classe mit einer m-fachen, einer n-fachen
und einer r-fachen Tangente.
Reduktionsfähige Ebenenbüschel oder windschiefe
Punktreihen erzeugen Regelflächen mit einer ~~mehrfacher~~
(r-facher) Erzeugenden.

49 IV

Es ist klar dass auch mehrere Paare von Reduktions-

DSI

elementen vorkommen können, wodurch sich dann die erwähnten Singularitäten der Erzeugnisse vermehren.

§ 52. Sind zwei m-n-deutige von r-ter Ordnung reduktionsfähige Strahlenbüschel wirklich in reduzirter Lage so ist ihr Erzeugniß eine Curve (m+n-r)-ter Ordnung mit einem (m-r)-fachen und einem (n-r)-fachen Punkte."

Denn in diesem Falle ist jeder Punkt des gemeinsamen Strahles ein r-facher Punkt des Erzeugnisses, dieser Strahl tritt also als r-fache Linie erster Ordnung in das Gesammterzeugniß ein, wodurch der Grad der eigentlichen Curve auf (m+n-r) herabgesetzt wird. Es ist klar daß die beiden mehrfachen Punkte wiederum die Büschelscheitel sind. Ist ~~n~~ r=m so ist der ~~Büschel~~ Scheitel des m-deutigen Büschels ein der Curve nicht angehöriger Punkt.

„Zwei m-n-deutige von r-ter Ordnung reduktionsfähige Punktreihen, in ihre ~~Red~~ reduzirte Lage wirklich gebracht erzeugen eine Curve (m+n-r)-ter Classe ~~mit~~ für welche die ~~beiden~~ Axen der beiden Punktreihen (n-r)-fache resp. (m-r)-fache Tangenten sind."

§ 53. Daß ein Paar entsprechender Strahlen einen Punkt des Erzeugnisses beider Büschel liefert so ist offenbar ~~ein~~ die Annahme eines Punktes der erzeugten Curve aequivalent der Annahme eines Paares entsprechender Strahlen. Nun liefert einerseits ein Reduktionsstrahlenpaar r-ter Ordnung einen r-fachen Punkt des Erzeugnisses und andererseits ~~vertritt~~ bei der Bestimmung einer Curve ein r-facher Punkt $\frac{r(r+1)}{2}$ einfache Punkte woraus folgt:

„Ein Reduktionselementenpaar r-ter Ordnung vertritt $\frac{r(r+1)}{2}$ gewöhnliche (einfache) Elementenpaare."

Nimmt man in der Ebene einer Plancurve n-ter Ordnung zwei beliebige Punkte als Scheitel zweier Strahlenbüschel an und betrachtet je zwei Strahlen die sich in einem Punkte der Curve durchschneiden als einander entsprechende Strahlen so hat man es offenbar mit zwei n-deutigen Büscheln zu thun welche überdies in reduzirter Lage n-ter Ordnung sich befinden, denn der beiden gemeinschaftliche Strahl entspricht sich offenbar n-mal selbst. Wenn der eine ~~B~~ Scheitel auf der Curve liegt so ist das eine Büschel nur mehr (n-1)-deutig; liegen beide Scheitel auf der Curve so sind beide Büschel

(n-1)-deutig.

54. Die beiden Büschel als deren Erzeugniß eine Curve auftritt können unter Umständen von besonderer Natur sein.

Sind z. B. S_m und S_n die Scheitel zweier projectivischer Strahleninvolutionen bezüglich vom Grade m und n, so stellen dieselben offenbar zwei m-n-deutige Strahlenbüschel dar und das Erzeugniß wird eine Curve (m+n)-ter Ordnung sein für welche S_m ein m-facher und S_n ein n-facher Punkt ist.

Sind beide Involutionen vom Grade n (S_n und S_n' seien ihre Scheitel) so ist die Curve vom Grade 2n. Besitzen überdies die beiden Involutionen je einen n-fachen Strahl so zwar daß diese beiden Strahlen auch zwei zu einander projectivisch entsprechende Gruppen darstellen so wird der Schnittpunkt dieses Reduktionsstrahlenpaares auch ein n-facher Punkt der erzeugten Curve. Besitzen nun die beiden Involutionen noch zwei weitere n-fache sich entsprechende Strahlen so erhält das Erzeugniß einen weiteren n-fachen Punkt und muß demgemäß in n durch die vier nun vorhandenen n-fachen Punkte gehenden Kegelschnitte zerfallen.

DSI

55. Bemerkenswert ist der Fall welcher eintritt wenn beide Involutionen S_n S_n' je einen n-fachen Strahl enthalten, welche Strahlen einander projectivisch entsprechen und mit dem gemeinschaftlichen Strahle $S_n S_n'$ zusammenfallen. In diesem Falle zerfällt nämlich das Erzeugniß in den n-fach zu zählenden Strahl $S_n S_n'$ und eine Curve C_n von der n-ten Ordnung. Daß die Scheitel S_n S_n' der Curve C_n nicht angehören ist sofort klar da sie ja schon als n-fache Punkte auf dem n-fach zu rechnenden Strahle $S_n S_n'$ Platz finden. Jede der beiden Involutionen enthält außer dem n-fachen Strahle noch (n-1) Doppelstrahlen, deren jedem in der zweiten Involution n Tangenten von C_n entsprechen. Es gehen also durch jeden der beiden Büschelscheitel S_n S_n' n(n-1) Tangenten der Curve C_n und dieselbe ist somit von der n(n-1)-ten Classe. Die Curve wird daher im Allgemeinen keine Doppelpunkte und keine Rückkehrpunkte besitzen.

Man kann also den Satz aussprechen:

„Zwei projectivische Strahleninvolutionen n-ten Grades in deren gemeinschaftlichen Strahle zwei einander entsprechende n-fache Strahlen beider Involutionen vereinigt sind, erzeugen eine Curve n-ter Ordnung und n(n-1)-ter Classe."

Hieraus folgt sofort der andere Satz:

„Jede durch die n^2 Schnittpunkte zweier n-strahligen Büschel gehende Curve n-ter Ordnung kann als Erzeugniß zweier projectivischen Involutionen n-ten Grades angesehen werden; für diese ~~beiden~~ Involutionen sind die beiden n-strahligen Büschel zwei entsprechende Strahlengruppen und der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel ist ein sich selbst entsprechender n-facher Strahl."

In der That, es seien zwei Scheitel S_n S'_n gegeben, durch S_n ziehe man n beliebige Strahlen A und ebenso durch S'_n beliebige n Strahlen A'. Die beiden n-strahligen Büschel A A' stellen zwei Curven n-ter Ordnung $\mathfrak{S}_n$ dar und folglich wird man durch ihre n^2 Schnittpunkte σ unendlich viele (ein Büschel bildende) Curven n-ter Ordnung legen können; es sei C_n eine solche Curve und p ein beliebiger Punkt derselben. Denkt man sich nun eine Involution n-ten Grades bestimmt durch die Gruppe A und den n-fachen Strahl $S_nS'_n$ und eben eine solche Involution bestimmt durch die Gruppe A' und den n-fachen Strahl S'_nS_n, und setzt man die beiden Involutionen so in projectivische Beziehung daß der n-fache gemeinschaftliche Strahl sich selbst, die Gruppe A der Gruppe A' und schließlich der Strahl S_np dem Strahl S'_np entspricht so wird das Erzeugniß der beiden Involutionen die Curve C_n sein, denn es ist eine Curve n-ter Ordnung welche mit C_n die n^2 Punkte σ und den Punkt p gemeinschaftlich hat, im Ganzen also (n^2+1) Punkte weßhalb sie mit C_n nothwendigerweise identisch ist.

Obwohl die Curve C_n eine Curve n-ter Ordnung und $n(n-1)$-ter Classe also ohne Singularitäten ist, so muß man sie doch als von spezieller Natur betrachten wenn $n>3$ ist. Stellen wir uns nämlich die Frage, ob wenn eine Curve C_n n-ter Ordnung vorliegt, sich zwei Punkte S_n S'_n finden lassen, welche man als Scheitel zweier die Curve in der angegebenen Weise erzeugenden projectivischen Involutionen n-ten Grades ansehen könnte. Es seien $x_1 y_1$ $x_2 y_2$ die fraglichen Coordinaten von S_n S'_n und $U=0$ die Gleichung von C_n, so handelt es sich offenbar nur darum durch S_n und S'_n zwei n-strahlige Gruppen so zu legen daß ihre n^2 Schnittpunkte σ auf C_n liegen. Es seien nun $A_1=0$ $A_2=0$ .... $A_n=0$ $(A_k \equiv (y-y_1)+\alpha_k(x-x_1))$ die Gleichungen der n durch S_n gehenden Geraden A und $A'_1=0$ $A'_2=0$ .... $A'_n=0$

($\Lambda'_k \equiv y - y_2 + \alpha'_k (x - x_2)$) die Gleichungen der n durch S'_2 gehenden Geraden Λ'; so ist die Gleichung irgend einer durch die n^2 Schnittpunkte der beiden Gruppen gehenden Curve n-ter Ordnung $\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \ldots \Lambda_n - \lambda \Lambda'_1 \Lambda'_2 \Lambda'_3 \ldots \Lambda'_n = 0$. In dieser Gleichung kommen die $(2n+5)$ unbekannten Grössen $x_1 y_1 x_2 y_2$ $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ $\alpha'_1 \ldots \alpha'_n$ λ vor und man hat diese so zu bestimmen daß die letzte Gleichung mit $U=0$ identisch wird. Da in $U=0$ im Allgemeinen $\left(\frac{n(n+3)}{2}+1\right)$ Glieder enthalten sind, so wird man die gestellte Aufgabe nur dann lösen können wenn:

$$2n+5 \geq \frac{n(n+3)}{2}+1$$

oder:

$$8 \geq n(n-1).$$

Dieser Bedingung genügen jedoch nur die Werte $n=1, 2, 3$. Man wird also noch eine beliebige Curve dritten Grades „durch projectivische Involutionen erzeugen können. Bei Curven des vierten oder eines höheren Grades ist dies im Allgemeinen nicht mehr möglich."

56. Für $n=1$ ergibt sich eine Gerade als Erzeugniss perspectivischer Strahlenbüschel.

Für $n=2$ hat man es mit zwei projectivischen quadratischen Strahleninvolutionen zu thun deren

deren gemeinschaftlicher Strahl ein Doppelstrahl beider ist und sich selbst entspricht und welche einen Kegelschnitt erzeugen. Die beiden Scheitel S_2 S'_2 sind zwei conjugirte Pole bezüglich des erzeugten Kegelschnittes weil der zweite Doppelstrahl in jeder Involution durch die Berührungspunkte der beiden vom Scheitel der anderen Involution an den erzeugten Kegelschnitt C_2 gehenden Tangenten hindurchgeht. Umgekehrt kann jeder Kegelschnitt auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische quadratische (Strahlen- (oder Punkt-) involutionen erzeugt werden deren Scheitel (Axen) zwei conjugirte Pole (conjugirte Strahlen) bezüglich des Kegelschnittes sind.

Für $n=3$ erhält man zwei projectivische cubische Strahleninvolutionen deren gemeinschaftlicher Strahl für beide ein dreifacher Strahl ist und sich selbst entspricht. Das Erzeugniss ist eine Curve dritter Ordnung und sechster Classe. In jeder Involution kommen ausser dem dreifachen Strahle noch zwei Doppelstrahlen vor von denen jeder die drei ihm in der anderen Involution entsprechenden Strahlen in drei Paaren zusammenfallender Punkte schneidet, diese drei letztgenannten Strahlen sind folglich Tangenten der Curve deren drei Berührungspunkte in gerader Linie liegen...

Wir können dies folgendermaßen aussprechen:
„Wird eine Curve dritter Ordnung durch die neun Schnittpunkte zweier dreistrahligen Büschel $S\,S'$ hindurchgelegt so lässt sie sich durch zwei projectivische cubische Involutionen erzeugen für welche S und S' die Scheitel und $\overline{SS'}$ ein sich selbst entsprechender dreifacher Strahl ist. Es gibt demnach unendlich viele dreistrahlige Büschelpaare an den Scheiteln SS' deren neun Schnittpunkte auf der Curve liegen. Die zwei in ~~einer~~ jeder der beiden Involutionen auftretenden Doppelstrahlen bilden die conische Polare des Scheitels der anderen Involution und folglich sind die beiden Scheitel SS' zwei correspondirende Punkte der Hesse'schen Curve unserer Curve. Die mit den beiden Doppelstrahlen einer der zwei Involutionen zu denselben Gruppen gehörigen zwei Strahlen bilden den beigeordneten Kegelschnitt des Scheitels der zweiten Involution."
Es ist nun auch umgekehrt klar dass jede Curve dritter Ordnung auf unendlich viele Arten durch projectivische cubische Involutionen erzeugt werden kann; es genügt zwei correspondirende Punkte der Hesse'schen Curve zu Scheiteln der Involutionen zu wählen und die Involutionen nebst deren Projectivität in der oben entwickelten Weise festzusetzen.

VII. Ein-zweideutige Gebilde.

§ 57. An die projectivischen Gebilde reihen sich naturgemäß die ein-zweideutigen Gebilde an; es soll in diesem Abschnitte das Wichtigste über deren Vervollständigung, ihr Vorkommen und ihre Erzeugnisse gezeigt werden.
Aus den allgemeinen Untersuchungen geht zunächst hervor „dass zwei ein-zweideutige Grundgebilde erster Stufe in ihrer Wechselbeziehung vollkommen gegeben sind wenn man fünf Paare entsprechender Elemente kennt." Es entsteht nun die Frage der Vervollständigung solcher Gebilde.
I Strahlenbüschel. Wir denken uns die beiden Strahlenbüschel in derselben Ebene; t sei der Scheitel des eindeutigen und d der Scheitel des zweideutigen Büschels. Jedem Strahle X von t entspricht ein Strahlenpaar $X_1 X_2$ von d während umgekehrt jedem X_1 nur ein X entspricht. Das zweideutige Büschel ist somit durch eine quadratische Involution repräsentirt welche projectivisch auf das Büschel t bezogen ist. Die Doppelstrahlen $V_{12}\ W_{12}$ von d entsprechen den beiden Verzweigungsstrahlen $V\ W$ von t.

Bringt man die beiden Büschel in reduzirte Lage so wird ihr Erzeugniß eine Curve zweiter (der Reduktionskegelschnitt) Ordnung welche durch d hindurchgeht aber t nicht enthält. Sind jedoch die Büschel in allgemeiner Lage so ist ihr Erzeugniß eine Curve dritter Ordnung ~~für~~ welche durch t hindurchgeht und d zu einem Doppelpunkte hat. Umgekehrt kann jeder Kegelschnitt und jede Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf unendlich viele Arten durch ein-zweideutige Strahlenbüschel erzeugt werden.

Ist R_2 irgend ein Kegelschnitt und wählt man von den zwei Büschelscheiteln t, d den ersten beliebig in der Ebene von R_2, den zweiten jedoch als Punkt von R_2 und betrachtet je zwei sich auf R_2 schneidende Strahlen der beiden Büschel als einander entsprechende Strahlen so hat man es mit zwei reduzirten ein-zweideutigen Strahlenbüscheln zu thun als deren Erzeugniß der Reduktions-Kegelschnitt R_2 auftritt. Dem gemeinschaftlichen Strahle beider Büschel entspricht nämlich erstens dieser Strahl selbst und zweitens die Tangente von R_2 in d. Die durch t an R_2 gehenden zwei Tangenten sind die

DS

Verzweigungsstrahlen V, W und die nach ihren Berührungspunkten von d aus gezogenen Strahlen sind die Doppelstrahlen V_{12} W_{12} des zweideutigen Büschels d.

Ist ferner gegeben eine ebene Curve dritter Ordnung C_3 mit einem Doppelpunkte d und wählt man einen beliebigen Punkt t auf C_3 so kann man wiederum je zwei Strahlen der beiden Büschel d, t als einander entsprechende betrachten sobald sie sich auf C_3 durchschneiden. Auch hier ist unmittelbar klar daß t ein eindeutiges und d ein zweideutiges Büschel ist. Dem gemeinschaftlichen Strahle beider Büschel entspricht in t die Tangente von C_3 in diesem Punkte und in d die beiden Tangenten von C_3 in d (die beiden Doppelpunkts-tangenten). Die Verzweigungsstrahlen V W sind die von t aus an die Curve C_3 (welche als Erzeugniß der beiden Büschel auftritt) gehenden Tangenten und die von d nach ihren Berührungspunkten gehenden Strahlen V_{12} W_{12} sind die Doppelstrahlen des Büschels d.

II Punktreihen. Das für Büschel Gesagte gilt in reciproker Weise für Punktreihen. Die beiden Reihen seien mit ihren Axen: T für die eindeutige D für die zweideutige in dieselbe

Ebene gebracht. Jedem Punkt x von T entspricht ein Punktepaar $x_1 x_2$ von D während umgekehrt jedem x_1 nur ein einziges x entspricht. Die zweideutige Punktreihe D ist somit eine quadratische Involution welche projectivisch auf T bezogen ist. Die Doppelpunkte v_{12} w_{12} dieser Involution entsprechen den beiden Verzweigungspunkten v, w von T. Wenn die beiden Punktreihen in reduzirte Lage gebracht werden so wird ihr Erzeugniß eine Curve zweiter Classe, der Reduktionskegelschnitt R_2 sein welcher D zur Tangente hat dagegen T nicht berührt.

In allgemeiner Lage ist das Erzeugniß der beiden Punktreihen eine Curve dritter Classe welche T zur einfachen und D zur Doppeltangente hat.

Umgekehrt kann jeder Kegelschnitt und jede ebene Curve dritter Classe wenn sie mit einer Doppeltangente versehen ist als das Erzeugniß zweier ein-zweideutigen Reihen und zwar auf unendlich viele Arten betrachtet werden.

Wählt man die Axe T beliebig dagegen D als Tangente eines Kegelschnittes R_2 und betrachtet zwei solche Punkte der beiden Punktreihen T D welche auf einer Tangente von R_2 liegen als einander entsprechende Punkte so hat man es offenbar mit ein-zweideutigen Punktreihen zu thun und zwar ist T die eindeutige und D die zweideutige Reihe; der Kegelschnitt R_2 tritt als Erzeugniß der beiden Reihen auf. Die beiden Punktreihen sind zugleich in reduzirter Lage denn es entspricht in der That dem gemeinschaftlichen Punkte derselben erstens dieser Punkt selbst und weiters der Berührungspunkt von D mit R_2. Die Schnittpunkte v w von T mit R_2 sind die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe und die Schnitte v_{12} W_{12} der Axe D mit den in v w an R_2 gelegten Tangenten sind die den Verzweigungspunkten entsprechenden Doppelpunkte von D.

Ist ferner eine Curve dritter Classe C^3 mit der Doppeltangente D gegeben so wähle man eine beliebige Tangente T als Axe der zweiten Punktreihe und betrachte solche Punkte der Reihen T D welche in Tangenten von C^3 liegen als einander entsprechende. Offenbar ist dann D die zweideutige und T die eindeutige Reihe und die Curve C^3 erscheint als das Erzeugniß der beiden Gebilde. Dem gemeinschaftlichen Punkte beider Reihen entspricht auf T der Berührungspunkt mit C^3 und auf D die beiden Berührungspunkte dieser Doppeltangente mit der Curve

Die Schnittpunkte der Curve C^3 mit T sind die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe und die Curventangenten in ihnen schneiden D in den entsprechenden zwei Doppelpunkten v_{12} w_{12}.

58. Die Art der Vervollständigung ein-zweideutiger Gebilde wenn dieselben durch fünf Elementenpaare gegeben sind folgt unmittelbar aus den früheren Auseinandersetzungen. Man wird die Gebilde entweder in reduzirte Lage überführen, oder man führt sie zurück auf reduzirte Gebilde anderer Art.

I. Strahlenbüschel. Es seien von den beiden ein-zweideutigen Büscheln t d fünf Paar entsprechender Strahlen AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, gegeben; legt man das eine z.B. das eindeutige Büschel t so ~~mit~~ in die Ebene von d dass zwei entsprechende Strahlen z.B. EE_1 zusammenfallen (ohne dass t auf d fällt) so werden die Büschel in reduzirter Lage sein und ihr Erzeugniss ein Kegelschnitt K_2. Für diesen Kegelschnitt kennt man fünf Punkte nämlich den Scheitel d des zweideutigen Büschels und die Schnittpunkte der vier Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; hiedurch ist K_2 vollkommen bestimmt und die

DS

Vervollständigung der beiden Büschel d.h. die Construction entsprechender Strahlen sowie die Construction der singulären Elemente (Verzweigungs- und Doppelstrahlen) kann keine Schwierigkeiten mehr machen.

Eine andere Vervollständigungsart bei welcher man (vorausgesetzt dass die beiden Büschel schon in einer Ebene liegen) die Büschel in ihrer ursprünglichen Lage belassen kann ist die folgende.

Bringt man die beiden Büschel mit zwei beliebigen Transversalen zum Durchschnitte so entstehen auf diesen zwei Punktreihen welche offenbar (da mit den Büscheln perspectivisch) in ein-zweideutiger Beziehung sein werden. Nun kann man die beiden Hilfstransversalen so wählen dass die entstehenden Punktreihen in reduzirter Lage sind, wozu nur nothwendig ist die beiden Transversalen durch den Schnittpunkt irgend eines Paares einander entsprechender Strahlen zu legen und da kann man dann selbstverständlich die beiden erwähnten Strahlen selbst als Transversalen verwenden. Wir wählen z.B. die Strahlen EE_1, so zwar dass wir das Büschel $ABCD\ldots$ mit E_1 und das Büschel $A_1B_1C_1D_1\ldots$ mit E zum Durchschnitte bringen. Es entstehen so auf E_1 die Punkte $abcd\ldots$ und

und auf E die Punkte $a_1, b_1, c_1, \ldots$. Da diese beiden Punktreihen perspectivisch sind mit den beiden ein-zweideutigen Büscheln so sind sie selbst auch in ein-zweideutiger Beziehung und zwar wird E_1 die eindeutige und E die zweideutige Reihe sein, sie sind jedoch auch in niedrigster Lage da der beiden Reihen gemeinsame Punkt sich selbst entspricht. Das Erzeugniss der beiden Punktreihen ist somit ein Kegelschnitt R_2, welchen wir als den <u>Reduktionskegelschnitt der beiden Büschel bezüglich des Strahlenpaares $E E_1$</u> bezeichnen. Für denselben haben wir fünf Tangenten, nämlich E als Träger der zweideutigen Reihe und die vier Strahlen aa_1, bb_1, cc_1, dd_1. Hiedurch ist der Kegelschnitt R_2 bestimmt und die Vervollständigung der beiden Büschel ist nun offenbar die folgende.

Um zu irgend einem Strahle Y_1 des zweideutigen Büschels den entsprechenden des eindeutigen zu finden wird man von dem Schnittpunkte y_1 von E mit Y_1 an R_2 die zweite Tangente legen welche E_1 in y trifft; durch diesen Punkt y geht nun der dem Y_1 entsprechende gesuchte Strahl Y des eindeutigen Büschels.

Um zu einem beliebigen Strahle X des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar des zweideutigen zu erhalten, wird man vom Schnittpunkte x von X mit E_1 an den Reduktionskegelschnitt R_2 die beiden Tangenten legen welche E in dem Punktepaare $x_1 x_2$ treffen durch welches die beiden gesuchten Strahlen $X_1 X_2$ des zweideutigen Büschels hindurchgehen.

Aus der Construktion folgt sofort daß dem gemeinschaftlichen Strahle beider Büschel im zweideutigen die von dessen Scheitel an R_2 gehenden zwei Tangenten entsprechen und ~~daß~~ im eindeutigen die zweite ~~an~~ aus seinem Scheitel an R_2 (außer E) gehende Tangente. Ebenso folgt daß die vom Scheitel des eindeutigen Büschels ~~an R_2 gehenden Tangenten~~ nach den Schnittpunkten $v\ w$ von R_2 mit E_1 gehenden Strahlen $V\ W$ die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels sind. Die ihnen entsprechenden Doppelstrahlen $V_{12}\ W_{12}$ des zweideutigen Büschels gehen durch die Punkte $v_{12}\ w_{12}$ in denen E von den Tangenten des Reduktionskegelschnittes R_2 welche man an diesen in $v\ w$ resp. legen kann geschnitten wird.

Aus dem Umstande daß man die Strahlenpaare $X_1 X_2$ erhält indem man die Punktepaare $x_1 x_2$ (in denen die von den Punkten x der Reihe E_1 an R_2 gelegten Tangentenpaare die Tangente E schneiden) mit dem Scheitel des zweideutigen Büschels

verbindet, folgt sofort der involutorische Charakter des zweideutigen Büschels. Der Reductionskegelschnitt R_2 kann gegen die Gerade E_1 eine dreifache Lage haben, indem er sie entweder in reellen Punkten schneidet, berührt, oder in imaginären Punkten schneidet. Im ersten Falle sind offenbar die singulären Strahlen $V\,W$ und auch $V_{12}\,W_{12}$ reell, im zweiten Falle fallen sie zusammen und im dritten Falle sind sie imaginär.

Was den zweiten Fall betrifft so ergibt sich unmittelbar daß die beiden Büschel projectivisch werden.

Im dritten Falle ~~ist~~ ist jeder Punkt X von E_1 außerhalb R_2 sodaß durch ihn immer ein reelles Tangentenpaar an R_2 geht d.h. jedem Strahle X des eindeutigen Büschels entspricht ein reelles Strahlenpaar X_1X_2 des zweideutigen. Sind dagegen die Punkte $v\,w$ reell so theilen sie die Axe E_1 in zwei Abtheilungen, aus den Punkten der einen (der äußeren) gehen reelle, aus den Punkten der anderen (der inneren) Abtheilung gehen imaginäre Tangentenpaare an R_2. Es werden also auch die beiden durch $v\,w$ gehenden Verzweigungsstrahlen $V\,W$ das eindeutige Büschel in zwei Abtheilungen theilen; den Strahlen der einen Abtheilung (der reellen) entsprechen reelle Strahlenpaare des zweideutigen Büschels und den Strahlen der anderen (imaginären) Abtheilung entsprechen imaginäre Strahlenpaare des zweideutigen Büschels. Wir sagen in diesem Falle daß das eindeutige Büschel „complex" ist, während es in dem vorhergehenden Falle als „reell" bezeichnet wird.

II. Punktreihen. Von den beiden ein-zweideutigen Punktreihen T $\mathfrak{T}$ seien die fünf Punktepaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1, gegeben, und beide Reihen mögen als in derselben Ebene liegend vorausgesetzt werden. Wir construiren auch hier einen Reductionskegelschnitt R_2 in Bezug auf irgend ein Punktepaar z.B. bezüglich ee_1. Wenn wir nämlich die Reihe T aus e_1 und $\mathfrak{T}$ aus e projiciren so erhalten wir zwei ein-zweideutige reduzirt liegende Strahlenbüschel welche den Kegelschnitt R_2 ~~zum~~ als Erzeugniß liefern. Für diesen Kegelschnitt haben wir fünf Punkte nämlich den Scheitel e des zweideutigen Büschels und die vier Schnittpunkte der vier Strahlenpaare ea_1, e_1a; eb_1, e_1b; ec_1, e_1c; ed_1, e_1d, im Ganzen also fünf Punkte wodurch R_2 gegeben ist. Um nun zu irgend einem Punkte y_1 von $\mathfrak{T}$ den entsprechenden y ~~von~~ T zu construiren zieht man ey_1 bis zum Durchschnitt mit R_2, diesen Schnitt verbindet man mit e_1 so ergibt sich ein Strahl welcher T in dem gesuchten Punkte y schneidet.

DSI

Soll zu irgend einem Punkte x der eindeutigen Reihe T das entsprechende Punktepaar $x_1 x_2$ der zweideutigen Reihe construirt werden, so ziehe man $e_1 x$ welcher Strahl den Reduktionskegelschnitt R_2 in zwei Punkten schneidet, welche mit e verbunden zwei Strahlen liefern die die Axe D in dem gesuchten Punktepaare $x_1 x_2$ treffen. Dem ~~[illegible]~~ der beiden Reihen gemeinschaftlichen Punkte entspricht in der eindeutigen Reihe T (wie sich sofort aus der letzten Construction ergibt) der zweite (außer e) Schnittpunkt von T mit R_2, und in der zweideutigen Reihe entsprechen ihm die beiden Schnittpunkte von D mit R_2. Auch ist klar daß die beiden von e_1 aus an den Reduktionskegelschnitt R_2 gelegten Tangenten $V\ W$ die Axe T in den beiden Verzweigungspunkten $v\ w$ schneiden und die von e aus nach den Berührungspunkten dieser Tangenten gerichteten Strahlen schneiden D in den beiden Doppelpunkten $v_{12}\ w_{12}$ der zweideutigen Reihe. Da die von e_1 ausgehenden Strahlen auf R_2 eine Punktinvolution bestimmen ~~[illegible]~~ welche von e auf D projicirt die Punktepaare $x_1 x_2 \ldots$ liefert so ist auch hier der involutorische Charakter der zweideutigen Reihe unmittelbar klar. Was die Realität der singulären Elemente betrifft so haben wir hier dieselben Fälle wie bei Strahlenbüscheln zu betrachten. Je nachdem nämlich der Punkt e_1 außerhalb, innerhalb oder auf dem Reduktionskegelschnitte R_2 liegt, sind die beiden Verzweigungspunkte v, w und die beiden Doppelpunkte $v_{12}\ w_{12}$ reell, imaginär oder zusammenfallend. Im letzten Falle gehen die einzweideutigen Reihen in projectivische Reihen über. Im zweiten Falle wird jedem Punkte x ein reelles Punktepaar $x_1 x_2$ entsprechen (die eindeutige Reihe ist reell); im ersten Falle werden die Verzweigungspunkte v, w die (jetzt complexe) eindeutige Reihe in zwei Theilen (den reellen und den imaginären Theil) trennen, so zwar daß jedem Punkte der einen (reellen) Partie ein reelles, und jedem Punkte der anderen (imaginären) Partie ein imaginäres Punktepaar der zweideutigen Reihe entspricht.

III. Ebenenbüschel. Dieselben führt man einfach durch die Operation des Schneidens mit Transversalen oder Transversalebenen auf einzweideutige Punktreihen oder Strahlenbüschel zurück.

Verschiedenartige einzweideutige Gebilde (Reihen und Büschel usw. [?]) wird man auf gleichartige zurückführen.

Anmerkung: Construction der Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche.

59. Wenn man in einem Punkte o einer beliebigen Fläche F die Tangentialebene θ und die Normale N construirt so ist das Strahlenbüschel in θ dessen Scheitel o ist, das Tangentenbüschel von F in o. Durch irgend eine dieser Tangenten z. B. X und N geht eine Ebene ξ, eine Normalebene welche mit F einen Normalschnitt erzeugt; es sei x der Krümmungsmittelpunkt dieses Normalschnittes im Punkte o, so ist x ein an N gelegener Punkt und es ist zunächst klar daß jeder Tangente X ein einziger solcher Punkt x entspricht. Dagegen entsprechen jedem x zwei Strahlen X; in der That schneidet die Kugel deren Mittelpunkt x (auf N) ist, die Fläche F in einer Curve welche o zum einem Doppelpunkte hat mit den Tangenten $X_1 X_2$, und jede der beiden Ebenen (NX_1), (NX_2) schneidet F in einer Curve für welche x der Krümmungsmittelpunkt von o ist. Also:

„Die Tangenten einer Fläche in einem (nicht singulären) Punkte bilden ein Strahlenbüschel welches mit den (auf der Normale gelegenen) Krümmungsmittelpunkten der zugehörigen Normalschnitte in ein-zweideutiger

DSI

Beziehung steht, und zwar ist die Reihe der Krümmungsmittelpunkte eindeutig und das Büschel der Tangenten (oder das Büschel der Normalebenen) zweideutig."

Rückt der Punkt x auf N in unendliche Entfernung so geht die früher erwähnte Kugel in die Tangentialebene θ über und $X_1 X_2$ werden die beiden Inflexionstangenten der Fläche im Punkte o. Wenn x nach o fällt so geht die Kugel in den einzelnen Punkt über oder besser gesagt sie wird zu einem Kegel welcher o zum Scheitel hat und den imaginären Kugelkreis im Unendlichen zur Leitlinie; $X_1 X_2$ gehen somit über in die beiden von o nach den imaginären Kreispunkten der Ebene θ gerichteten Strahlen. Wenn schließlich der Punkt x in einen der Hauptkrümmungsmittelpunkte v, w der Fläche fällt so wird die Kugel die Fläche F längs eines Elements einer der beiden durch o gehenden Krümmungslinien berühren und $X_1 X_2$ fallen zusammen in die betreffende Hauptkrümmungsrichtung, sie bilden einen Doppelstrahl des zweideutigen Büschels.

„In der im letzten Satze erwähnten ein-zweideutigen Beziehung entsprechen dem unendlich weiten Punkte der Normale die beiden Inflexionstangenten der Fläche, dem

~~den~~ Fusspunkte o der Normale entsprechen die beiden nach den imaginären Kreispunkten der Tangentialebene gerichteten Tangenten. Die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte v, w sind die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe und die ihnen entsprechenden Doppelstrahlen sind die beiden (~~aufeinander~~ Hauptkrümmungstangenten."

Da es unter den Strahlenpaaren der Involution welche das zweideutige Tangentenbüschel darstellt auch ein nach den imaginären Kreispunkten gerichtetes Strahlenpaar gibt so müssen die beiden Doppelstrahlen aufeinander senkrecht stehen; ein Beweis des bekannten Satzes dass die beiden Hauptkrümmungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen. Durch die beiden Verzweigungspunkte v, w d.h. durch die Hauptkrümmungscentra wird die Normale in zwei Theile getheilt, den reellen und den imaginären Theil des eindeutigen Gebildes auf N; der Fusspunkt o liegt da ihm ein imaginäres Strahlenpaar entspricht immer in dem imaginären Theile der eindeutigen Punktreihe auf N. Wenn also die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte auf derselben Seite von o liegen, so ist der durch Unendliche gehende Theil der Normale der imaginäre Theil und es entsprechen daher dem unendlich weiten Punkte von N jedenfalls zwei imaginäre Strahlen des zweideutigen Büschels d.h. die beiden Inflexionstangenten sind imaginär oder die Fläche ist im Punkte o concav-concav, [o ist ein elliptischer Punkt]. Wenn dagegen der Fusspunkt o zwischen den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten liegt so ist der durch das Unendliche gehende Theil der Normale der reelle und die Inflexionstangenten sind daher reell d.h. die Fläche ist im Punkte o concav-convex; o ist ein hyperbolischer Punkt.

Wenn wir den Parameter irgendeines Krümmungsmittelpunktes x mit ξ und den Parameter der entsprechenden Tangente X mit η bezeichnen so wird nach Art 2 zwischen ξ und η eine Gleichung von der Form:

$$\xi(a\eta^2+b\eta+c)+(a_1\eta^2+b_1\eta+c_1)=0. \quad ----(1)$$

Es sollen nun ξ und η Theilverhältnisse bedeuten und zwar ξ das Theilverhältniss von x bezüglich der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte v w also $\xi = \frac{vx}{wx}$ und η das Theilverhältniss von X bezüglich der beiden Hauptkrümmungstangenten V_{12} W_{12} also $\eta = \frac{\sin V_{12}X}{\sin W_{12}X}$. ~~[illegible]~~ Wenn wir die beiden Hauptkrümmungsradien ov, ow mit $R_1 R_2$ und den Krümmungsradius ox mit R bezeichnen so ist $\xi = \frac{R_1-R}{R_2-R}$ und wenn der Winkel $\widehat{V_{12}X}$ mit φ bezeichnet wird so ist $\widehat{W_{12}X} = 90^\circ - \widehat{V_{12}X}$ und daher $\eta = \operatorname{tg}\varphi$.

Da dem Verzweigungspunkte o u. w die Doppelstrahlen V_{12} W_{12} entsprechen so müssen für $\xi = 0$ beide η-Werte Null und für $\xi = \infty$ beide η-Werte unendlich werden, so dass in der Gleichung (1) nothwendigerweise $a=0$ $b=0$ $b_1=0$ $c_1=0$ sein muss und die Gleichung daher ~~[illegible]~~ $c\xi = a_1 \eta^2$ oder für $\frac{a_1}{c} = \alpha$ ~~[illegible]~~

$$\xi = \alpha \eta^2$$

lauten muss. Führt man für ξ und η die Werte ein so hat man

$$\frac{R_1 - R}{R_2 - R} = \alpha \, tg^2\varphi \quad \ldots\ldots (2)$$

Nun muss für $R = 0$ $\quad tg\varphi = \pm\sqrt{-1}$ oder $tg^2\varphi = -1$ werden daher ist

$$\frac{R_1}{R_2} = -\alpha$$

und es geht (2) über in

$$\frac{R_1 - R}{R_2 - R} = -\frac{R_1}{R_2} \, tg^2\varphi$$

woraus durch einfache Umsetzung die bekannte Fundamentalrelation $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$ folgt.

DSI

ko. Die nachgewiesene einzweideutige Beziehung zwischen der Reihe der Krümmungscentra auf der Normale und dem Büschel der zugehörigen Tangenten in der Tangentialebene kann auch dazu dienen um die folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe: „Wenn die Krümmungsradien dreier durch einen Punkt gehenden Schnitte einer Fläche gegeben sind, den Krümmungsradius irgend eines Schnittes, ferner die Hauptkrümmungsrichtungen und die Hauptkrümmungsradien zu construiren."

Da nach einem bekannten Satze der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes gleich ist der Projection des Krümmungsradius des durch dieselbe Tangente gehenden Normalschnittes so kann man sich offenbar auf Normalschnitte beschränken. Es seien A, B, C die Tangenten dreier Normalschnitte (Tangenten in o) welchen die Krümmungsmittelpunkte a, b, c auf N entsprechen mögen. Dann entsprechen also den drei Punkten a, b, c der eindeutigen Reihe auf N die drei Strahlen A, B, C des zweideutigen Büschels o. Überdies wissen wir dass dem Fusspunkte o der Normale die beiden von o nach den imaginären Kreispunkten der Tangentialebene gehenden Strahlen des Büschels entsprechen. Nun haben wir also von den beiden einzweideutigen Gebilden N, o fünf Elementenpaare gegeben und werden folglich dieselben vervollständigen können

Zu dem Behufe denken wir uns die Normale N so in die Tangentialebene O gelegt, dass der Punkt a auf den ihm entsprechenden Strahl A_1 fällt, ohne dass jedoch A_1 mit N zusammenfiele. Nun projicire man die Punktreihe o a b c aus einem beliebig auf A_1 gewählten Punkte t durch das Strahlenbüschel O A B C … . Man erhält so zwei einzweideutige Büschel O A B C … und $A_1 B_1 C_1$ … wobei sich die gleichbezeichneten Strahlen entsprechen und wobei dem Strahle O des eindeutigen Büschels die beiden von o nach den imaginären Kreispunkten der Ebene O gehenden Strahlen des zweideutigen Büschels entsprechen werden.

Die beiden Strahlenbüschel sind jedoch überdies in ~~perspectivischer~~ reducirter Lage, da sich die zwei entsprechenden Strahlen A A_1 decken. Der Reductionskegelschnitt R_2 ist sonach bestimmt durch folgende fünf Punkte: o als Scheitel des zweideutigen Büschels, (BB_1), (CC_1) als Schnittpunkte zweier Strahlenpaare und schliesslich durch die zwei Punkte auf O in denen dieser Strahl von den beiden durch o nach den imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen geschnitten wird. Diese zwei Schnittpunkte stellen sich als die Doppelpunkte jener Involution dar, in welcher O von der rechtwinkligen Strahleninvolution getroffen wird welche o zum Scheitel hat.

Man kennt also von dem Reductionskegelschnitte drei reelle Punkte und die Involution welche er auf der Geraden O bestimmt, und er kann daher in bekannter Art construirt werden.

Zieht man von t an den Reductionskegelschnitt die beiden immer reellen Tangenten V W so schneiden diese die in O liegende Normale schon in den zwei Hauptkrümmungsmittelpunkten v, w (welche selbstverständlich in die ursprüngliche Lage zurücktransportirt werden müssen). Die von o nach den Berührungspunkten dieser Tangenten gehenden Strahlen sind als ~~die~~ die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels zugleich die beiden Hauptkrümmungstangenten.

Um zu einem beliebigen durch die Tangente X fixirten Normalschnitte den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt x zu finden wird man den Schnittpunkt von X und R_2 mit t verbinden wodurch ein Strahl entsteht welcher die in der Tangentialebene liegende Normale N in dem gesuchten (immer noch zurückzuversetzenden) Punkte x schneidet.

Besonders einfach gestaltet sich diese Lösung wenn es sich um eine Fläche zweiten oder dritten Grades handelt. Denn bei der ersteren kann man die beiden durch o gehenden Erzeugenden benützen und es genügt dann die Kenntniss ~~am~~ des Krümmungsmittelpunktes eines einzigen (Normal-)Schnittes um alle Krümmungsmittelpunkte zu construiren und bei der Fläche kann man die drei immer reellen (von den 27) durch einen Punkt gehenden Kegelschnitte der Fläche, resp. ihre Krümmungsmittelpunkte benützen.

Dem hochwohlgebornen Herrn Herrn

Mathias Waniek Ritter von Domyslov

k. k. Ministerialrath, Ritter des k. k. oest. Leopold-
ordens u. s. w. u. s. w.

als Zeichen seiner Dankbarkeit und Verehrung

der Verfasser.

DSI

W E Y R, Emil - Austrian Mathematician

B. August 31, 1848. Prague
D. January 25, 1894. Vienna (Austria)

Worked very successfully in the field of synthetic geometry and advocated Fiedler's and CREMONA's theories. His important contribution to the theories on algebraic correspondences, on involutions and on space curves of the 5th and 6th order opened new paths to further research.

1\. A.M.S. 140 p. 4to (German) Scientific Manuscript with the title "BEITRAEGE ZUR CURVENLEHRE" (Contributions to the Theory of Curves)

PUBLISHED in bookform in Vienna, Austria 64 p. 8vo - 1880.

6 p. 4to (German) Wien, March 1, 1895. Draft of a very interesting letter addressed to the Dean of the Faculty of Philosophy at the University dealing with the suggested choice of the noted physicist BOLTZMANN as STEFAN's successor at the Institute for Physics in Vienna.

Attached a letter of Dr. Weyr's son, FRANTISEK WEYR, professor for international law at the Masaryk-University in BRNO, Czechoslovakia, confirming the authenticity of the above mentioned handwritings of his father.

WEINER